МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и
автоматического управления

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление
факультета КНиИТ
Анохина Артема Сергеевича

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент ______________ И. Е. Тананко

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Тема математического моделирования СМО с групповым обслуживанием весьма актуальна в современном мире в связи с возрастающей сложностью обслуживающих систем и необходимостью оптимизации их производительности. Групповое обслуживание широко используется в различных областях, включая транспорт, здравоохранение, банковское дело и телекоммуникации, и это лишь некоторые из них. Такие системы предполагают одновременное обслуживание нескольких требований или же клиентов одним обслуживающим прибором, что может значительно сократить время ожидания и повысить эффективность системы.

Однако анализ СМО с групповым обслуживанием может быть сложным из-за множества факторов, которые необходимо учитывать, таких, как размер группы, время между прибытием групп и распределение времени обслуживания. Математическое моделирование предоставляет мощный инструмент для анализа и оптимизации таких систем, поскольку оно позволяет нам моделировать поведение системы и прогнозировать влияние изменений на параметры системы.

Цель бакалаврской работы — математическое моделирование систем с групповым обслуживанием.

Данная цель была выполнена последовательным решением следующих задач:

1. изучить СМО с групповым обслуживанием, с изменяющимся размером группы требований;
2. рассмотреть частный случай СМО с групповым обслуживанием, с фиксированным размером группы требований;
3. изучить теорию по имитационному моделированию, в частности теорию про дискретно-событийное моделирование, рассмотреть основные трудности возникающие при моделировании;
4. разработать дискретно-событийную модель частного случая СМО с групповым обслуживанием, с фиксированным размером группы требований;
5. программно реализовать дискретно-событийную модель этой системы;
6. исследовать и проанализировать СМО с групповым обслуживанием с помощью разработанной программы.

Методологические основы исследования работы СМО, в том числе и СМО с групповым обслуживанием, представлены в работах В. Ф. Матвеева, В. Г. Ушакова [1], В. Г. Карташевского [2], J. Medhi [3], K. Wu, B. Zwart [4]. Работы с теорией по имитационному моделированию A. M. Law, W. D. Kelton [5], Р. Шеннон [6], Х.А. Таха [7].

Практическая значимость бакалаврской работы. Была разработана программа для моделирования системы массового обслуживания с групповым обслуживанием. Программа позволяет находить основные характеристики СМО с групповым обслуживанием с заданными параметрами, при помощи моделирования, а так же подкрепление полученных результатов аналитическим решением. Программа может использоваться для решения задач анализа и оптимизации работы СМО с групповым обслуживанием.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объем работы — 61 страница, из них 44 страницы — основное содержание, включая 22 рисунка и 6 таблиц, список использованных источников информации — 21 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Классификация СМО» содержит описание классификации СМО при помощи нотации Кендалла, основанной на пяти символах:

$$A/S/\kappa/B/Z,$$

Где каждая буква означает:

1. A — входящий поток требований;
2. S — последовательности длительностей обслуживания на приборах системы;
3. κ — количество обслуживающих приборов;
4. B — число мест в очереди;
5. Z — дисциплина обслуживания.

Кроме того приведены обозначения основных характеристик системы:

- λ — интенсивность входящего поток требований (среднее число требований поступающих в СМО в единицу времени);
- μ — интенсивность обслуживания требований одним прибором (среднее число требований, которое один обслуживающий прибор может обра-

ботать за единицу времени, при условии, что он непрерывно находится в работе);

- $\overline{u}$ — математическое ожидание длительности пребывания требований в СМО;
- $\overline{w}$ — математическое ожидание длительности пребывания требований в очереди СМО;
- $\overline{n}$ — математическое ожидание числа требований в СМО;
- $\overline{b}$ — математическое ожидание числа требований в очереди СМО.

А так же приведена формула Литтла

$$\overline{n} = \lambda\overline{u}, \qquad \overline{b} = \lambda\overline{w}.$$

Второй раздел «СМО с групповым обслуживанием» посвящен описанию двух типов СМО, а именно $M/M(a,b)/1$ и $M/M^Y/1$.

Для общего аналитического решения была взята СМО с групповым обслуживанием вида $M/M(a,b)/1$. В этой системе заявки поступают с пуассоновским потоком интенсивности λ, а интенсивность обслуживания для каждой группы заявок составляет μ. Если количество требований в очереди после освобождения обслуживающего прибора меньше a, то он ожидает, пока в очереди не накопится группа из точно a требований, а затем начинает их обслуживание. В случае, если количество требований в очереди после освобождения составляет a или более, обслуживающий прибор принимает на обслуживание b требований, если они имеются в очереди, либо обрабатывает все требования, находящиеся в очереди.

В разделе приводятся формулы стационарных вероятностей состояний системы, а так же основные формулы характеристик найденных для этой системы:

1. Вероятность состояния системы, когда прибор занят и в очереди n требований,

$$p_{1,n} = \left(\frac{1-r^b}{1-r}\right) r^{n+1} p_{0,0}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

2. Вероятность состояния системы, когда прибор свободен и в очереди

q требований,

$$p_{0,q} = \left(\frac{1 - r^{q+1}}{1 - r}\right) p_{0,0}, \quad q = 1, 2, \dots, a - 1.$$

3. Вероятность состояния системы, когда прибор свободен и в очереди 0 требований,

$$p_{0,0} = \left[\frac{a}{1 - r} + \frac{r^{a+1} - r^{b+1}}{(1 - r)^2}\right]^{-1}.$$

4. Математическое ожидание числа требований в очереди СМО,

$$\overline{b} = \frac{p_{0,0}}{1 - r} \left\{\frac{a(a - 1)}{2} + \frac{r^2 \left[ar^{a-1}(1 - r) - (1 - r^a)\right]}{(1 - r)^2}\right\} + \frac{p_{0,0}\left(1 - r^b\right)}{1 - r} \frac{r^2}{(1 - r)^2}.$$

5. Вероятность того, что обслуживающий прибор занят и средний размер обслуживаемой группы

$$P_{1,n} = p_{0,0} \frac{r(1 - r^b)}{(1 - r)^2}, \qquad \overline{s} = \frac{1}{P_{1,a}} \left(\sum_{q=a}^{b-1} q p_{1,q} + b \sum_{n=b}^{\infty} p_{1,n}\right).$$

6. Математическое ожидание числа требований, находящихся на обслуживании

$$\overline{m} = \overline{s} P_{1,n} \quad \text{или} \quad \overline{m} = \left(a + \frac{r(1 - r^{b-a})}{1 - r}\right) p_{0,0} \frac{r(1 - r^b)}{(1 - r)^2}.$$

7. Математическое ожидание числа требований в системе,

$$\overline{n} = \overline{b} + \overline{m}.$$

Здесь r — вещественный корень $(0 < r < 1)$ уравнения $\frac{\lambda}{\mu} = r + r^2 + \dots + r^b$, удовлетворяющий условию сохранения стационарного режима функционирования системы $\psi = \frac{\lambda}{b\mu} < 1$.

Подраздел 2.2 посвящен математическому описанию и вычислению характеристик системы $M/M^Y/1$, в которой размер группы требований является фиксированным, в этом случае $a = b = Y$.

В подразделе приводятся формулы основных характеристик функционирования системы:

1. Вероятность состояния системы, когда прибор занят и в очереди n требований

$$p_{1,n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 r^n = \psi(1-r) r^n = p_Y r^n, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

2. Вероятность состояния системы, когда прибор свободен и в очереди q требований

$$p_q = p_{0,q} = \frac{1 - r^{q+1}}{Y}, \quad q = 1, 2, \ldots, Y-1.$$

3. Вероятность состояния системы, когда прибор свободен и в очереди 0 требований

$$p_0 = p_{0,0} = \frac{1-r}{Y}.$$

4. Математическое ожидание числа требований в очереди

$$\overline{b} = \frac{Y-1}{2} + \frac{r^{Y+1}}{1-r}.$$

5. Математическое ожидание числа требований в системе

$$\overline{n} = \frac{Y-1}{2} + \frac{r}{1-r}.$$

Третий раздел «Основные аспекты имитационного моделирования» посвящен имитационному моделированию. Подробно рассмотрен подход дискретно-событийного моделирования, а так же приведено описание имитационной модели СМО $M/M^Y/1$, основанной на дискретно-событийном подходе [8].

В разделе 3.1 рассмотрены подходы к моделированию СМО, в подробностях рассмотрен дискретно-событийный подход, суть которого заключается в создании модели системы, которая представляет собой последовательность дискретных событий, происходящих в ней с течением времени (для описания используются такие системные элементы, как очереди, задержки, прибытие, обслуживание и др). Дискретно-событийное моделирование является гибким методом, который может использоваться для моделирования широкого спектра систем, в том числе для моделирования очередей и систем с групповым обслуживанием. Кроме того, этот метод позволяет учитывать стохастические факторы, такие как случайные задержки в обработке заявок и изменения потока запросов. Так же рассмотрены основные трудности с которым можно столкнуться при разработке дискретно-событийной модели.

В разделе 3.2 рассмотрены иные подходы к имитационному моделированию, такие как агентное моделирование, а так же моделирование системной динамики.

В разделе 3.3 описана имитационная модель СМО вида $M/M^Y/1$.

Основные модельные характеристики:

1. $t_a(arrival)$ — момент прибытия нового требования и его постановка в очередь СМО;
2. $t_s(start)$ — момент начала обслуживания требования СМО;
3. $t_d(departure)$ — момент завершения обслуживания требования и его выход из СМО;
4. T — Общее модельное время;
5. K — Общее число требований на момент конца модельного времени.

Описаны процессы обработки событий и нюансы работы, построенной модели, а так же приведены формулы основных оценочных характеристик модели:

1. Оценка математического ожидания длительности пребывания требований в СМО

$$\widetilde{u} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(t_{di} - t_{ai}).$$

2. Оценка математического ожидания длительности пребывания требований в очереди СМО

$$\widetilde{w} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(t_{si} - t_{ai}).$$

3. Оценка математического ожидания числа требований в очереди СМО

$$\widetilde{b} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{K}(t_{si} - t_{ai}).$$

4. Оценка вероятностей состояний СМО $\widetilde{p_k}$

$$\widetilde{p_k} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T_k} t_i^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где t_i^k — длительность интервала времени i в течении которого в СМО находится ровно k требований, демонстрация интервалов на рисунке 1 и T_k — число этих интервалов.

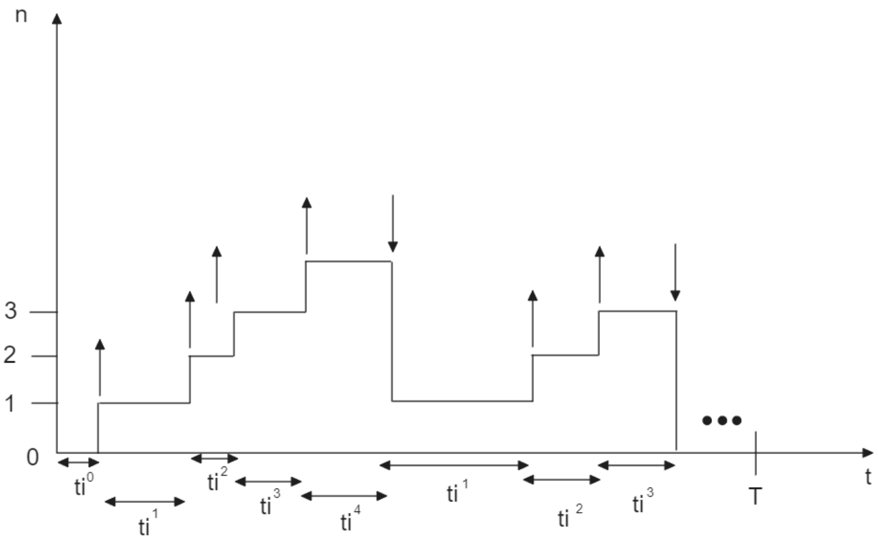

Рисунок 1 – Процесс поступления и обслуживания требований (размер группы 3)

5. Оценка числа математического ожидания числа требований в системе

$$\widetilde{n} = \sum_{k=1}^{\infty} k\widetilde{p_k}.$$

Четвертый раздел «Разработка и реализация программы анализа имитационной модели СМО $M/M^Y/1$» содержит описание разработанного алгоритма и программы.

Алгоритм основан на обработке двух основных событий: поступление нового требования в СМО и завершение обслуживания группы требований, при этом параллельно обработке этих событий собирается вся необходимая статистика как для СМО в общем, так и для каждого требования.

В подразделе 4.1 описывается структура программы, реализующей дискретно - событийную модель СМО и аналитическое решение для подкрепления результатов моделирования, а также пользовательский интерфейс [9,10].

В подразделе 4.2 описывается интерфейс разработанной программы, описан процесс её использование, а так же обработка ошибок.

Пятый раздел «Результаты исследования работы СМО $M/M^Y/1$» посвящен примерам использования программы, для нахождения оптимальных параметров системы.

Так же стоит упомянуть, что для моделирования следует выбирать оптимальное время, размер которого удовлетворяет как точности полученных характеристик, так и длительности самого моделирования.

Подраздел 5.1 описывает пример применения программы для нахождения оптимального размера группы при котором м. о. числа требований в очереди является минимальным.

В подразделе 5.2 приводится пример оптимизации стоимостной функции, которая была введена без использования сторонних источников, сама функция имеет следующий вид

$$F(Y) = \widetilde{w}(Y)c_1 + (1 - \widetilde{\psi}(Y))c_2.$$

Здесь c_1 — это потери от пребывания в очереди, измеряется в условных единицах, c_2 — потери от простоя системы, так же измеряется в условных единицах.

Система имеет следующие параметры, пуассоновский входящий поток требований с параметром $\lambda = 17$ и экспоненциальное распределение длительностей обслуживания с параметром $\mu = 6$. Очередь бесконечной емкости, дисциплина обслуживания $FIFO$, один обслуживающий прибор и размер группы требований Y.

В первом случае $c_1 = 4$ и $c_2 = 12$, то есть простой прибора обходится дороже чем, пребывание требования в очереди. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты расчетов для $c_2 = 3c_1$

Размер группы Y	$\widetilde{w}$	$\widetilde{\psi}$	$\widetilde{w}(Y)c_1$	$(1 - \widetilde{\psi}(Y))c_2$	$F(Y)$
3	1.845	0.943	7.390	0.679	8.070
4	0.302	0.707	1.211	3.506	4.717
5	0.213	0.567	0.852	5.188	6.041
6	0.200	0.472	0.800	6.329	7.129
7	0.209	0.404	0.836	7.144	7.981
8	0.227	0.354	0.910	7.743	8.654
9	0.249	0.314	0.998	8.228	9.226
10	0.274	0.283	1.098	8.594	9.693

Из результатов видно, что оптимальный размер группы при котором стоимостная функция минимальна, это 4. Теперь изменим стоимостные коэффициенты, пусть $c_1 = 4$, а $c_2 = 0.2c_1$. Как можно увидеть из графика на рисунке 2, в данном случае оптимальный размер группы уже равен 5.

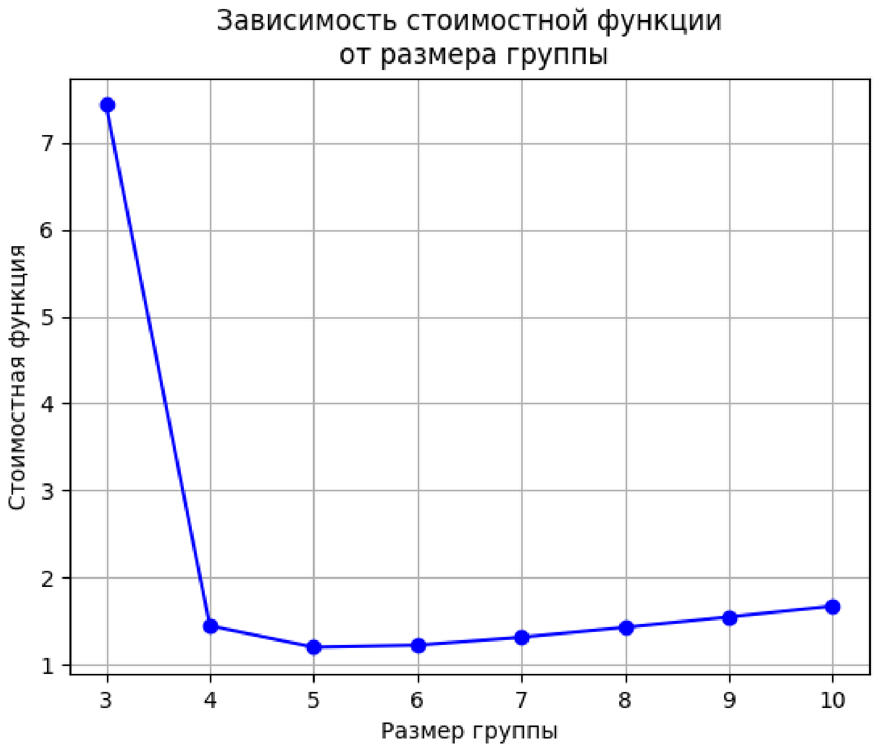

Рисунок 2 – Зависимость значения стоимостной функции $F(Y)$ от размера группы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены основные понятия систем массового обслуживания, в частности СМО с групповым обслуживанием. Был рассмотрен принцип классификации СМО, а так же приведены основные характеристики и параметры СМО. Изучены СМО с групповым обслуживанием. Кроме того в работе рассмотрены основные принципы имитационного моделирования, алгоритмы построения дискретно-событийных моделей и нахождение основных характеристик по результатам моделирования.

Разработан программный модуль, моделирующий работу СМО с групповым обслуживанием типа $M/M^Y/1$ и позволяющий вычислять основные характеристики системы на основании дискретной модели, кроме того так же разработан модуль аналитического решения, для проверки результатов полученных путем моделирования. Также разработана основная программа, представляющая собой удобный графический интерфейс для проведения экспериментов над моделью системы, включающая в себя как модуль аналитического решения, так и модуль дискретно-событийной модели. Все программы реализованы на языке $Python$, графический модуль использует библиотеку $customtkinter$.

Был проведен анализ эффективности реализованной имитационной дикcретно-событийной модели, рассмотрена точность модели и ее производительность.

Были вычислены основные характеристики для СМО типа $M/M^Y/1$, проведен сравнительный анализ полученных характеристик с аналитическим решением. Также были рассмотрены две оптимизационных задачи:

1. Нахождения оптимального размера группы для нахождения оптимального м. о. числа требований в очереди;
2. Минимизация стоимостной функции.

С учетом точности полученной модели, можно сделать вывод, что ее можно использовать для оценки и оптимизации реальных систем массового обслуживания с групповым обслуживанием.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Матвеев, В. Ф. Системы массового обслуживания / В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков : Издателство МГУ, 1984. — 240 с.

2 Карташевский, В.Г. Основы теории массового обслуживания: учебник для вузов / В.Г. Карташевский. М.: Горячая линия – Телеком, 2013. — 130 с.

3 Medhi, J. Stochastic Models in Queueing Theory / J. Medhi : Academic Press, 2002. — 501 p.

4 Wu, K. Approximating the Performance of a Batch Service Queue Using the $M/M^k/1$ / K. Wu, B. Zwart // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2010. — 8 с.

5 Law, A. M. Simulation Modeling and Analysis / A. M. Law, W. D. Kelton : «BHV», 2004. – 847 p.

6 Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука / Шеннон Р. : Издательство Мир, 1978. – 424 с.

7 Таха, Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха : Издательство «Вильямс», 2005. — 912 с.

8 Тананко, И. Е. Моделирование систем. Лабораторный практикум / И. Е. Тананко, В. И. Долгов : «Наука», 2014. — 67 с.

9 Бейдер, Д. Чистый Python. Тонкости программирования для профи. / Д. Бейдер; пер. с англ. А. Логунов СПб. : Питер, 2018. — 288 с.

10 Бэрри, П. Изучаем программирование на Python / П. Бэрри; пер. с англ. М. А. Райтман М. : Эксмо, 2018. — 624 с.