

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Излучение электрон-позитронной плазмы,  
возбуждаемой из вакуума в сильных электромагнитных полях**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

Студента 2 курса 2211 группы  
направления 03.04.01 «Прикладные математика и физика»  
Института физики  
Церюпа Владислава Анатольевича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н., профессор



С.А. Смолянский

дата, подпись

Заведующий кафедрой  
доцент, к.ф.-м.н., доцент



Е.Н. Бегинин

дата, подпись

Саратов 2023 год

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследуемой проблемы.** До недавнего времени задачи, связанные с рождением частиц из вакуума, представляли в основном теоретический интерес. Это обусловлено тем, что нестабильность вакуума может наблюдаться лишь в крайне сильных электрических полях с напряженностью порядка  $E_c \approx 10^{16}$  В/см. Однако в связи с успешным развитием фемтосекундных лазеров появляется возможность создавать исключительно сильные электромагнитные поля прямо в лабораториях. В настоящее время в мире создаются лазерные установки с планируемой интенсивностью излучения порядка  $10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup> ( $E \approx 0.001E_c$ ). Ожидается, что при столь высокой интенсивности удастся обнаружить такие связанные с излучением реакции, как «дампинг» заряженных частиц (плазмы), рождение электрон-позитронной плазмы и гамма-вспышки.

Эффект рождения частиц приобрел в последние годы еще большую актуальность, благодаря его применению в физике конденсированного состояния: эффект удалось пронаблюдать в физике графена<sup>1</sup>.

**Цель данной работы** состоит в том, чтобы численно исследовать:

— излучение, создаваемое классическими («максвелловскими») токами плазмы — электрон-позитронной в вакууме, электрон-дырочной в графене; в частности, цель — вычислить спектр квазиклассического излучения и соответствующее ему электрическое поле;

— квантовое излучение плазмы; его спектр (распределение фотонов по величине импульса и направлению) в каждый момент времени; интенсивность, диаграмма направленности излучения, плотность фотонов.

Для достижения поставленной цели в работе использован метод квантовых кинетических уравнений<sup>2</sup> и поставлена **задача** — получить численные решения кинетических уравнений относительно функции распределения фермионов и фотонов — в вакууме и в графене.

---

<sup>1</sup>Castro Neto, A.H.; Guinea, F.; Peres, N.M.R.; Novoselov, K.S.; Geim, A.K. The electronic properties of graphene. Rev. Mod. Phys. 2009, 81, 109, doi:10.1103/RevModPhys.81.109.

<sup>2</sup>S. M. Schmidt, D. Blaschke, G. Röpke, S. A. Smolyansky, A. V. Prozorkevich, and V. D. Toneev, Int. J. Mod. Phys. E 7, 709 (1998).

**Научная новизна** результатов работы состоит в том, что с помощью численных методов обнаружено следующее:

1. Создаваемое плазмой внутреннее квазиклассическое поле  $E_{int}(t)$  в графене, вопреки сделанному в работе предположению, сильно превосходит внешнее поле  $E_{ext}(t)$ :  $E_{int} \gg E_{ext}$ . Закон сохранения энергии сильно нарушен. Это означает, что в будущих работах следует учесть влияние внутреннего поля на динамику фермионов в графене (в настоящей работе этого не сделано).

В вакууме ситуация лучше. Неограниченный рост внутреннего поля не наблюдался, оно пренебрежимо мало по сравнению с внешним:  $E_{int} \ll E_{ext}$ .

2. В спектре квазиклассического излучения, генерируемого электрон-позитронной плазмой в вакууме, максимумы наблюдаются лишь на частоте внешнего поля и на его нечетных гармониках; четные гармоники отсутствуют. В графене же напротив: в спектре квазиклассического излучения присутствуют и четные, и нечетные гармоники.

3. В спектре квантового излучения в графене максимум интенсивности наблюдается на частоте порядка  $(2v_F/c) \max_t |(e/h)A(t)|$ . Отсюда следует, что характерный импульс фотонов приблизительно в  $c/v_F = 300$  раз меньше характерного импульса фермионов, а их характерные энергии равны, по крайней мере по порядку величины.

4. Фотоны в графене продолжают испускаться даже после того, как внешнее поле сработало и выключилось, причем темп их рождения и интенсивность излучения при  $t \rightarrow +\infty$  выходят на константу, отличную от нуля. Это — еще одно нарушение закона сохранения энергии (ЗСЭ) в рассмотренной модели.

5. Квантовое излучение в графене преимущественно изотропно (особенно при  $t \gg \tau$ , когда внешнее поле уже выключено), тогда как квантовое излучение в вакууме, наоборот, анизотропно. Так, квантовое излучение в направлении внешнего поля (или в противоположном направлении) в вакууме отсутствует, а в графене присутствует.

**Структура и объем работы.** Магистерская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка цитируемой литературы. Материал работы изложен на 38 страницах, содержит 21 иллюстрацию и список цитируемой литературы из 35 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе приводятся основные кинетические уравнения (КУ), которые описывают рождение заряженных частиц: уравнения учитывают взаимодействие фермионной подсистемы ( $e^-h^+$  в графене,  $e^-e^+$  в вакууме) с электромагнитными полями двух видов — с квазиклассическим полем  $A^\mu$  и с квантовым полем  $\hat{A}^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ).

Кинетические уравнения представляют собой систему двух интегрально-дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных (искомых) величин — относительно функции распределения фермионов  $f(\mathbf{p}, t)$  и функции распределения фотонов  $F(\mathbf{k}, t)$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс электрона,  $\hbar\mathbf{k}$  — импульс фотона,  $t$  — время; причем считается, что импульсы фиксированы, т.е. не зависят от времени. Функция распределения по определению равна среднему числу частиц (электронов или фотонов) в состоянии с заданным импульсом в момент  $t$ .

В подразделе 1.1 кинетические уравнения записываются в графене для электрон-дыричной плазмы и фотонов. Сначала записываются в исходном («сложном») виде<sup>1</sup>, затем вводятся следующие упрощения:

- предполагаем, что создаваемое плазменными токами поле («внутреннее поле») пренебрежимо мало по сравнению с внешним (заданным) полем;
- считаем, что квантовое излучение (фотонный резервуар) не влияет на динамику фермионов и самих фотонов; т.е. пренебрегаем функцией распределения фотонов в правых частях фермионного КУ и фотонного КУ;
- пренебрегаем запаздыванием  $(t - t')$  в «свёртках», которые описывают элементарные акты взаимодействия фермионов с фотонами и (при учете запаздывания) отвечают за «эффект памяти» в кинетических уравнениях.

В результате получаем следующие (упрощенные) КУ в графене:

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{e^2 v_F^4 p_\perp^2 E(t)}{2 \varepsilon^2(\mathbf{p}, t)} \int_{t_0}^t \frac{E(t')}{\varepsilon^2(\mathbf{p}; t')} [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \left[ \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t \varepsilon(\mathbf{p}, t'') dt'' \right], \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Gavrilov, S.P.; Gitman, D.M.; Dmitriev, V.V.; Panferov, A.D.; Smolyansky, S.A. Radiation Problems Accompanying Carrier Production by an Electric Field in the Graphene. Universe 2020, 6, 205. <https://doi.org/10.3390/universe6110205>.

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{k}, t) = & 2 \frac{(ev_F)^2}{\hbar ck} \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \cdot \\ & \cdot \left\{ f(\mathbf{p}, t') [1 - f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t')] \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t (\varepsilon(\mathbf{p}, t'') - \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t'') - c\hbar k) dt'' \right] + \right. \\ & \left. + f(\mathbf{p}, t') f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t (\varepsilon(\mathbf{p}, t'') + \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t'') - c\hbar k) dt'' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

где квазиэнергия

$$\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{p_{\perp}^2 + [p_{\parallel} + (e/c)A(t)]^2}, \quad (3)$$

$v_F = 10^8$  см/с — скорость Ферми,

$p_{\parallel}$  — компонента импульса электрона в направлении внешнего поля  $E(t)$ ,

$p_{\perp}$  — компонента импульса электрона, ортогональная внешнему полю;

считаем, что векторы ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{p}$ ) лежат в плоскости графена.

Уравнения (1), (2) снабжаются нулевыми начальными условиями:

$$f(t_0) = 0, \quad F(t_0) = 0.$$

**В подразделе 1.2** записываются кинетические уравнения для электрон-позитронной плазмы в вакууме. Уравнения сначала записываются в исходном виде<sup>1</sup>, затем вводятся упрощения — в точности те же, что были введены в графене и перечислены выше.

В результате получаем следующие (упрощенные) КУ в вакууме:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{p}, t) = & e^2 E(t) \frac{m^2 c^2 + p_{\perp}^2}{2\varepsilon^2(\mathbf{p}, t)} \cdot \\ & \cdot \int_{t_0}^t \frac{E(t')}{\varepsilon^2(\mathbf{p}, t')} [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \left[ \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t \varepsilon(\mathbf{p}, t'') dt'' \right] dt', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{k}, t) = & \frac{2e^2}{mck} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \int_{t_0}^t dt' \sum_{r=1}^2 \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^{(r)}(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^{(r)}(-\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t)} \cdot \\ & \cdot \left\{ f(\mathbf{p}, t') [1 - f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t')] \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t (\varepsilon(\mathbf{p}, t'') - \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t'') - c\hbar k) dt'' \right] + \right. \\ & \left. + f(\mathbf{p}, t') f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t (\varepsilon(\mathbf{p}, t'') + \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t'') - c\hbar k) dt'' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup>S.A. Smolyansky, A.M. Fedotov, A.D. Panferov and S.O. Pirogov. Closed system of equations for description of the e+e- plasma generated from vacuum by strong electric field. EPJ Web Conf., 204 (2019) 06010. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201920406010>.

где  $\mathbf{P} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}(t)$  — квазиимпульс,  $\mathbf{e}^{(r)}$  — вектор поляризации фотона ( $r = 1, 2$ ), а квазиэнергия теперь имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}, t) = c\sqrt{m^2c^2 + p_{\perp}^2 + [p_{\parallel} + (e/c)A(t)]^2}. \quad (6)$$

**Во втором разделе** рассматриваются результаты численного решения фермионного КУ (уравнение (1) — в графене, (4) — в вакууме) для конкретной модели внешнего поля  $E(t)$ .

Внешнее поле задано в таком виде, чтобы оно имитировало поле в фокусном пятне двух лазерных (когерентных) импульсов, распространяющихся навстречу друг другу:

$$E(t) = E_0 \cos(\Omega t) \exp[-t^2/(2\tau^2)], \quad (7)$$

где  $\Omega$  — циклическая частота электромагнитной волны лазерного импульса,  $\tau$  — характерная длительность (время затухания). Считаем, что поле включается в некоторый отдаленный момент  $t_0$  ( $t_0 \rightarrow -\infty$ , или  $t_0 \ll -\tau$ ).

Используются следующие значения параметров внешнего поля (7).

В графене:  $E_0 \sim 10^6$  В/см,  $\tau \sim 10^{-15}$  с,  $\Omega = 0$ .

В вакууме:  $E_0 \sim 10^{14}$  В/см,  $\tau \sim 10^{-19}$  с,  $\Omega \sim 10^{20}$  рад/с.

И в вакууме, и в графене рассматриваются графики эволюции функции распределения фермионов  $f(t)$  при фиксированном импульсе  $\mathbf{p}$ , зависимость («поверхность») фермионной функции  $f$  от проекций импульса ( $p_{\perp}, p_{\parallel}$ ) при фиксированном времени  $t$ . Далее вычисляется плотность плазменных токов  $j(t)$ :

$$j(t) = \frac{1}{E(t)} \frac{dw_f}{dt}, \quad (8)$$

где  $w_f(t)$  — плотность энергии фермионов (электронов и дырок в графене, или электронов и позитронов в вакууме).

Плотность энергии фермионов в графене имеет вид

$$w_f(t) = \frac{8}{(2\pi\hbar)^2} \int \varepsilon(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t) d^2p, \quad (9)$$

где квазиэнергия  $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{\mathbf{P}^2}$ . Плотность энергии фермионов в вакууме

$$w_f(t) = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int \varepsilon(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t) d^3p, \quad (10)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{P}^2}$ .

Результат вычисления токов  $j(t)$  (8) изображен на рисунке 1.

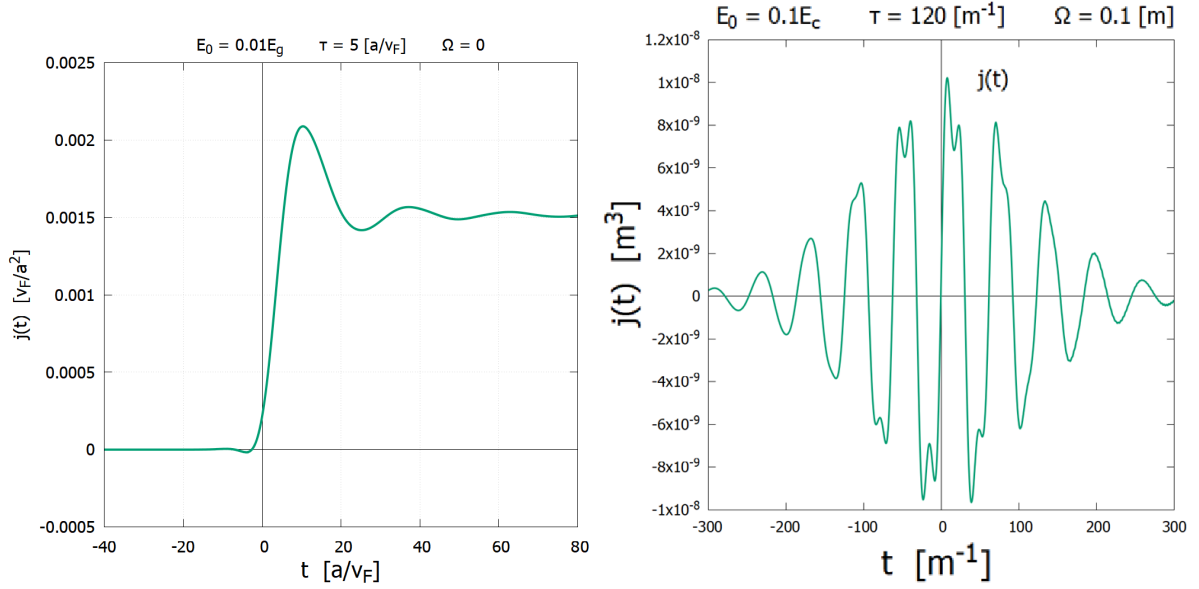


Рисунок 1 — Плотность тока  $j(t)$ . Слева — в графене, справа — в вакууме

С помощью плазменного тока  $j(t)$  вычисляется генерируемое плазмой внутреннее квазиклассическое поле  $E_{int}(t)$  (рисунок 2). Получаем его из закона Ампера в отсутствие магнитного поля:

$$\dot{E}_{int}(t) = -4\pi j(t). \quad (11)$$

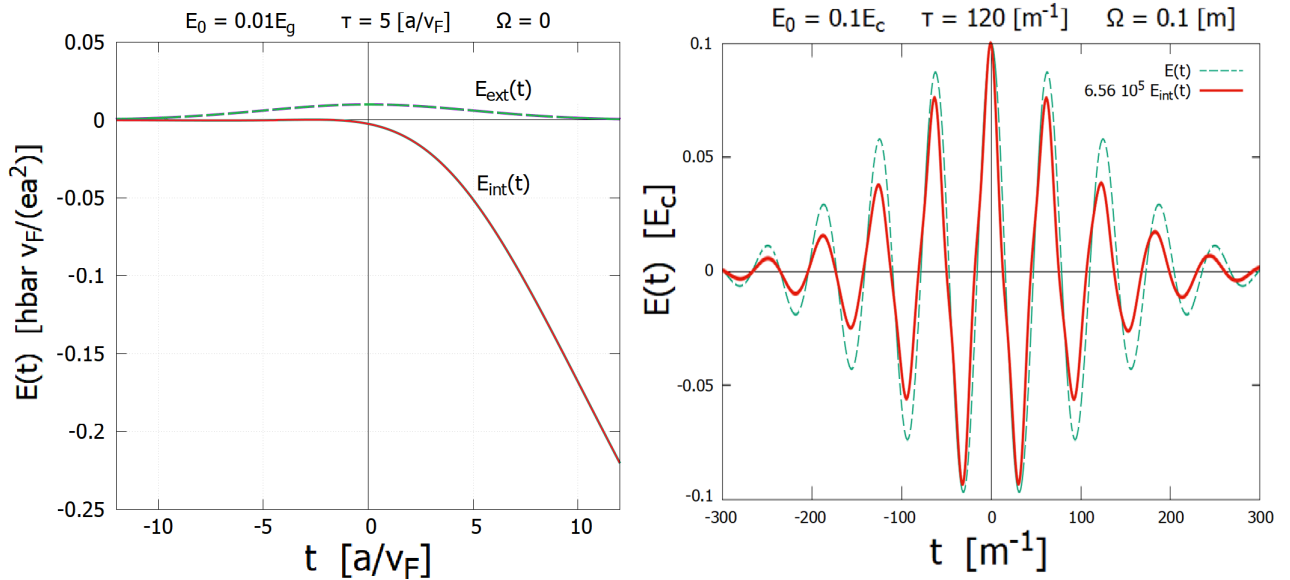


Рисунок 2 — Электрические поля. Слева — в графене, справа — в вакууме.

Сплошная линия — внешнее поле, пунктирная — внутреннее поле

Результат вычисления амплитудного спектра внутреннего поля,  $|E_{int}(\omega)|$  представлен на рисунке 3.

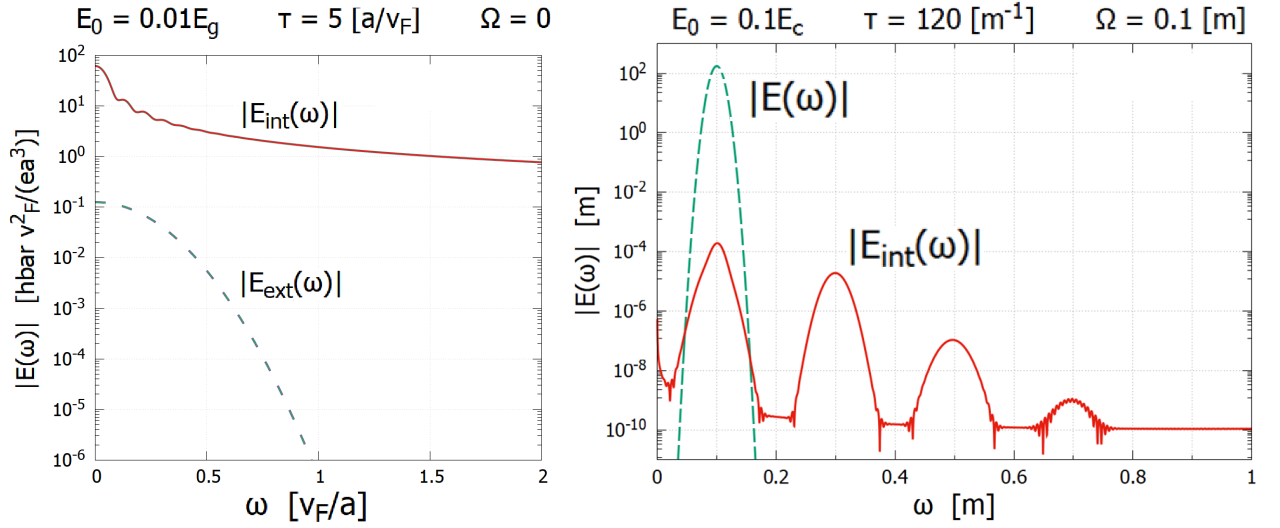


Рисунок 3 — Спектр электрических полей. Слева — в графене, справа — в вакууме. Сплошная линия — внешнее поле, пунктирная — внутреннее поле

**В третьем разделе** рассматривается фотонное КУ (уравнение (2) — в графене, уравнение (5) — в вакууме) для той же модели внешнего поля  $E(t)$ , что в предыдущем разделе. Доказывается, что квантовое излучение как в графене, так и в вакууме обладает следующими общими свойствами:

- в инфракрасной области ( $k \rightarrow 0$ ) функция распределения фотонов изотропна и имеет особенность  $\dot{F}(k) \propto 1/k$ ;
- в ультрафиолетовой области ( $k \rightarrow \infty$ ) функция распределения фотонов анизотропна и обладает экспоненциальным завалом  $\dot{F}(k) \propto e^{-\alpha k}/k$  ( $\alpha > 0$  — некоторая константа), что позволяет говорить о локализованности функций  $k^2 \dot{F}(k)$ ,  $k^3 \dot{F}(k)$  и о наличии у них экстремума.

**В подразделе 3.1** исследуются более детально свойства квантового излучения электрон-дырочной плазмы в графене: прежде всего, показана фотонная функция  $F(\mathbf{k}, t)$  и ее производная  $\dot{F}(\mathbf{k}, t)$  (рисунок 4), полученные численным решением уравнения (2). Далее вычисляется концентрация фотонов  $n_{photon}(t)$  и их энергия  $w_{photon}(t)$ :

$$n_{photon}(t) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{k}, t) d^2k, \quad (12)$$

$$w_{photon}(t) = \frac{2\hbar c}{(2\pi)^2} \int k F(\mathbf{k}, t) d^2k. \quad (13)$$



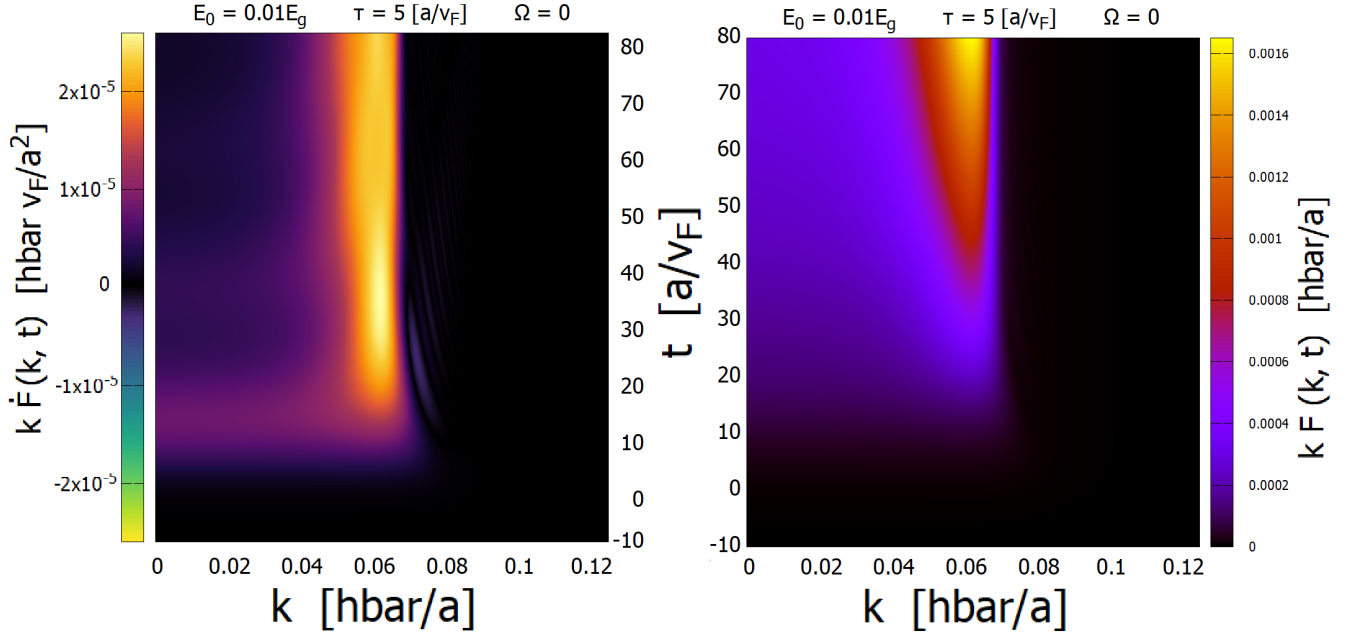


Рисунок 4 — Импульсно-временная  $(k, t)$  зависимость фотонных функций.  
Слева — поверхность  $k\dot{F}(k, t)$ , справа —  $kF(k, t)$

Результат вычисления концентрации фотонов (12) и их энергии (13) изображен на рисунке 5. Заметим, что рождение фотонов продолжается и не замедляется даже после того, как внешнее поле сработало и выключилось:

$$\dot{n}_{photon}, \dot{w}_{photon} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} const \neq 0. \quad (14)$$

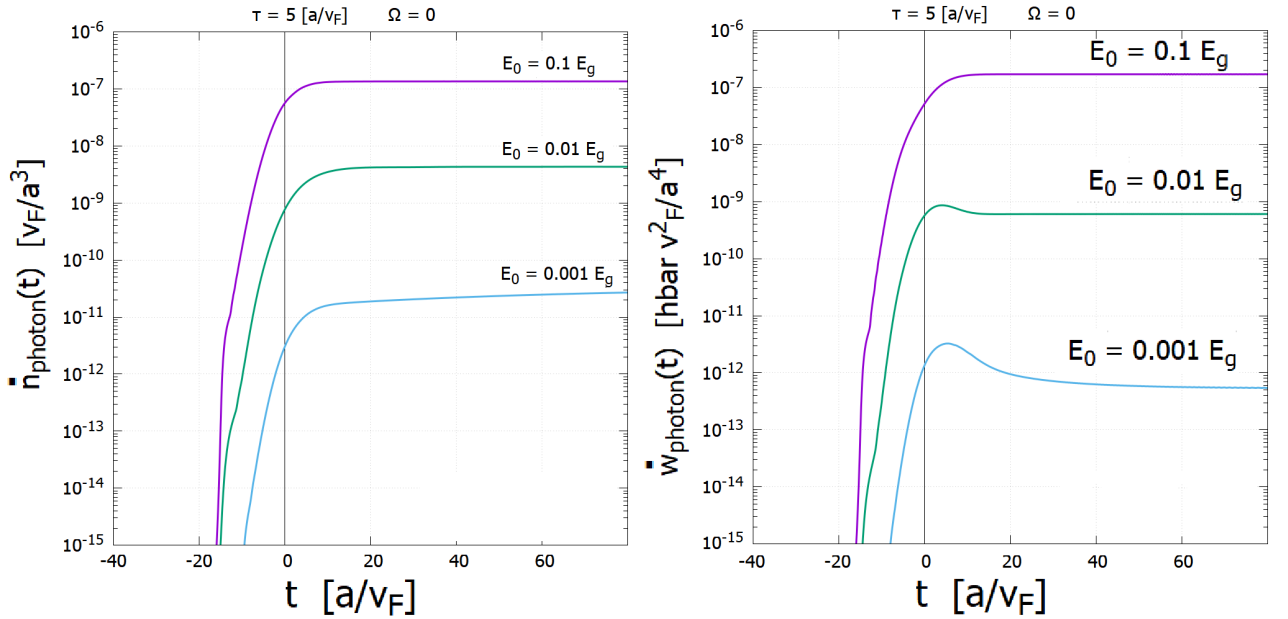


Рисунок 5 — Слева — эволюция скорости рождения фотонов  $\dot{n}_{photon}(t)$ ,  
справа — эволюция интенсивности квантового излучения  $\dot{w}_{photon}(t)$

В завершение подраздела 3.1 рассматривается диаграмма направленности для интенсивности квантового излучения в графене в фиксированный момент. Из рисунка 6 следует, что квантовое излучение анизотропно в момент, когда внешнее поле активно ( $t \approx 0$ ): излучение в направлении внешнего поля (или в противоположном направлении) преобладает над излучением в ортогональном направлении. Однако, с течением времени излучение становится всё более изотропным.

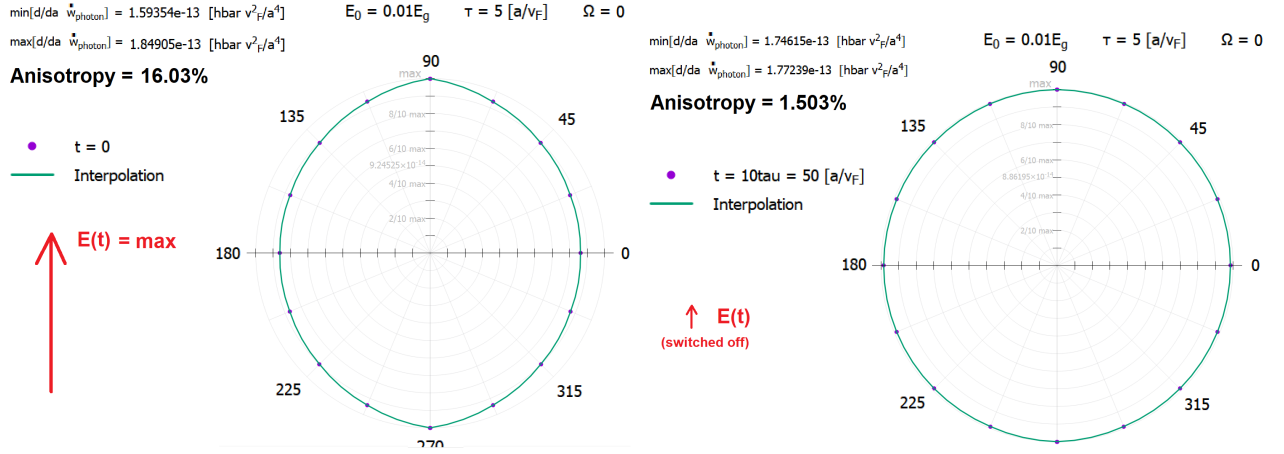


Рисунок 6 — Диаграмма направленности квантового излучения в графене.

Слева — в момент, когда внешнее поле  $E(t)$  максимально ( $t = 0$ ); справа — в момент, когда внешнее поле сработало и выключилось ( $t = 10\tau$ )

В подразделе 3.2 исследуется более детально квантовое излучение электрон-позитронной плазмы в вакууме. Для этого аналитическими методами рассматривается фотонное КУ (5); численные методы в этом подразделе нами не используются ввиду высокой трудоемкости вычислений.

В этом подразделе утверждается, что спектральная плотность энергии квантового излучения электрон-позитронной плазмы схожа в «инфракрасной» области со спектральной плотностью равновесного теплового излучения. Другими словами, спектральная плотность энергии фотонов  $dw_{photon}/dk$  при малых  $k$  ( $k \rightarrow 0$ ) подчиняется закону Рэлея-Джинса:  $dw_{photon}/dk \propto k^2$  ( $k$  — волновое число фотона).

В завершение работы доказывается, что в направлении внешнего поля  $\mathbf{E}$  (и против его направления) квантовое излучение электрон-позитронной плазмы в вакууме отсутствует:

$$\dot{F}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \parallel \mathbf{E}. \quad (15)$$