

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ
В ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА**

АВТОРЕФЕРАТ

ВЫПУСКНОЙ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 4022 группы

направления 03.03.02 «Физика» Института физики

Парамоновой Людмилы Геннадиевны

Научный руководитель

д.ф.-м.н. профессор

В.М. Аникин

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н. профессор

В.М. Аникин

Саратов 2023

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Базовым понятием термодинамики – как классической равновесной, так и современной неравновесной – является понятие равновесного состояния для изолированной системы. Эволюция произвольного состояния к состоянию равновесия происходит в результате необратимых процессов, которые «понуждают» систему эволюционировать к состоянию равновесия. В состоянии равновесия эти процессы прекращаются. Информация, даваемая термодинамикой, имеет ценность вследствие ее общности.

В термодинамических терминах установления равновесного состояния можно трактовать и эволюционные свойства детерминированных дискретных динамических систем в форме разностных уравнений $x_{n+1} = f(x_n)$, демонстрирующих хаотическое поведение. Если траекторные особенности итерационного процесса на всех его стадиях можно предсказать исключительно в вероятностном ключе, то направление, в котором меняются при итерациях вероятностные свойства (по ансамблю траекторий) сечений процесса можно назвать однозначно – это первая собственная функция ассоциированного с отображением оператора Перрона – Фробениуса, которая носит название *инвариантной плотности*.

В настоящей выпускной квалификационной работе (ВКР) рассматриваются *эволюционные* свойства ассоциированного с хаотическими отображениями *оператора Перрона-Фробениуса* (ОПФ), вид которого определяется конкретным отображением.

Целью работы является аналитическое определение скорости сходимости произвольного вероятностного распределения к неподвижной «точке» оператора (инвариантному распределению).

В *задачи* работы входят:

а) выявление асимптотических закономерностей (особенностей) сходимости начального вероятностного распределения к стационарному (инвариантному) в результате многократного действия ОПФ кусочно-линейных отображений (двоичного сдвига Бернулли и пирамидального отображения) на исходные вероятностные плотности в виде многочленов первого и второго порядков. *Методической базой* для проводимых расчетов является использование решения спектральной задачи для соответствующих ОПФ – его собственных функций и собственных чисел;

б) Решение аналогичной задачи для хаотического отображения в виде квадратичного полинома Чебышёва второго рода на основе точного траекторного решения для этого отображения $x_n = x_n(n, x_0)$;

в) Рассмотрение особенностей эволюционных процессов, обусловленных действием ОПФ хаотического отображения Гаусса.

СТРУКТУРА И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структурно ВКР состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка использованных источников (26 наименований). Общий объем – 43 с.

Во введении дается общая характеристика работы (актуальность, цели и задачи, научная и практическая значимость и т.д.).

В главе 1 проводится аналитическое исследование установления «стационарного» вероятностного состояния в кусочно-линейных хаотических отображениях на основе решения спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса. Последовательно рассматриваются следующие вопросы:

1. Определение оператора Перрона-Фробениуса, ассоциированного с хаотическим отображением.
2. Решение спектральной задачи (нахождение Собственных функций и собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса) для хаотического отображений «сдвиг Бернулли» и инвертированного кусочно-линейного преобразования.
3. Решение спектральной задачи для пирамидального отображения
4. Изучение динамики установления инвариантного распределения в кусочно-линейных отображениях.

Двоичный сдвиг Бернулли определяется преобразованием (рис. 1):

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n < 1, \end{cases}, n=1,2,\dots \quad (1)$$

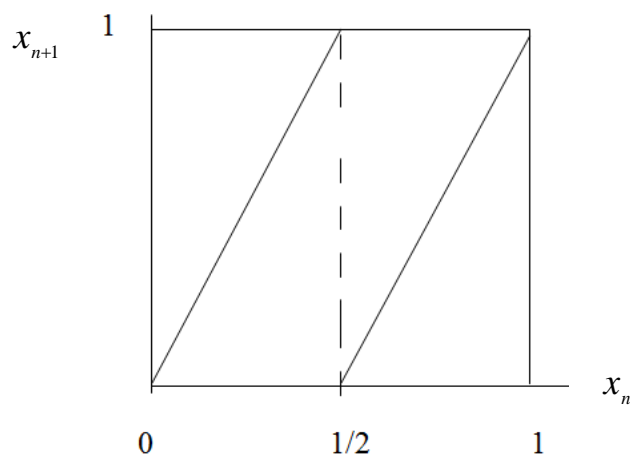
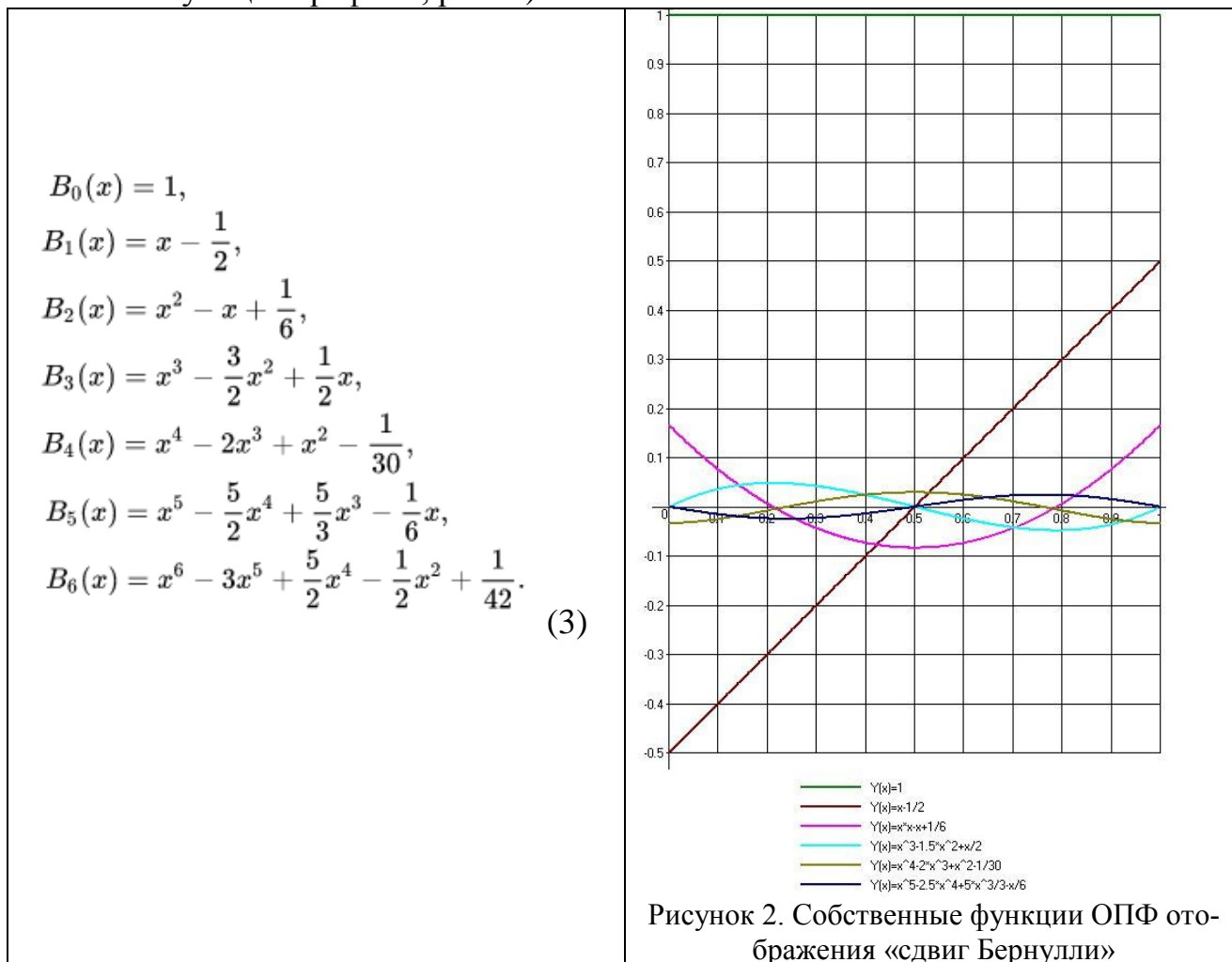


Рисунок 1 – Двоичный сдвиг Бернулли

Данному отображению соответствует ОПФ следующего вида:

$$P_B f(x) = \frac{1}{2}(f(x/2) + f((1+x)/2)). \quad (2)$$

Собственными функциями этого оператора являются полиномы Бернулли. Собственными функциями ОПФ (2) являются полиномы Бернулли $B_k(x)$, первые шесть из которых имеют вид (слева – аналитические выражения, справа – соответствующие графики, рис. 2):



Собственными значениями ОПФ (2) являются числа $\lambda_k = 1/2^k$. Инвариантным распределением двоичного сдвига Бернулли является *равномерное* распределение. Введем *важное в методическом плане* отображение, инверсное по отношению к сдвигу Бернулли, т.е. с итеративной функцией $g_{inv}(x) = 1 - g(x)$ (рисунок 3):

$$x_{n+1} = 1 - \{2x_n\} = \begin{cases} 1 - 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2, \\ 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Оператор Перрона-Фробениуса для (3) записывается как

$$P_{\bar{B}} f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1-x}{2}\right) + f\left(\frac{2-x}{2}\right) \right). \quad (5)$$

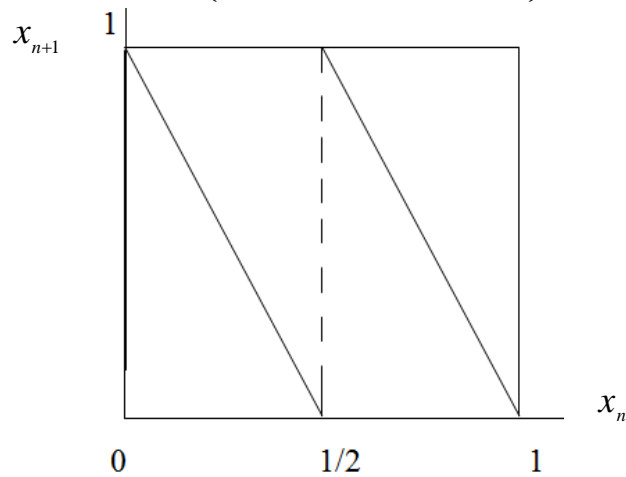


Рисунок 3 – Инверсный двоичный сдвиг Бернулли

Для ОПФ этого отображения собственные числа являются *знакопеременными*:

$$PB_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} B_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Пирамидальное отображение (tent map, рисунок 4) определяется как

$$x_{n+1} = 1 - |2x_n - 1| = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2 - 2x_n & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

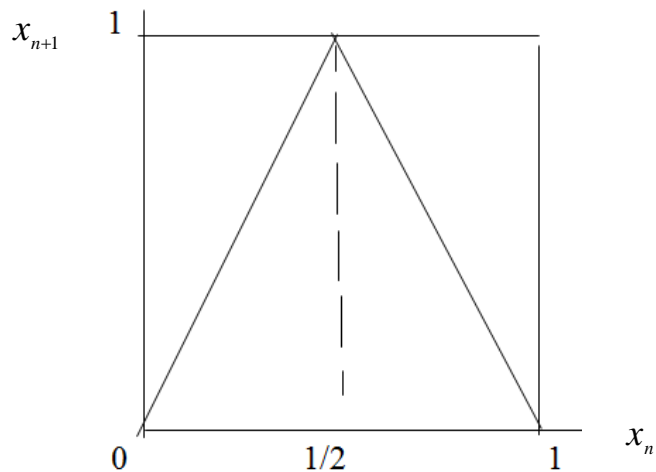


Рисунок 4 – Пирамидальное отображение

Пирамидальному отображению отвечает оператор Перрона–Фробениуса:

$$P_T f(x) = \frac{1}{2} (f(x/2) + f(1 - x/2)). \quad (8)$$

Нечетные по порядку полиномы Бернулли составляют *нуль-пространство* оператора (8), а четные полиномы Бернулли аргумента $x/2$ являются *собственными функциями* $\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x/2, t)$ этого оператора с собственными числами $\lambda_{2n} = 1/2^{2n}$, то есть

$$P_T B_{2n+1}(x) = 0, \quad P_T B_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^{2n}} B_{2n}\left(\frac{x}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Пирамидальное отображение, как и сдвиг Бернулли, характеризуется равномерным инвариантным распределением. Оно является неподвижной точкой оператора (8), т.е. воспроизводится при его действии с единичным собственным числом.

Сходимость к инвариантной плотности. Сдвиг Бернулли. Рассмотрим вопрос асимптотического поведения итерационной процедуры $P_B^n f_0(x)$, где $P_B f_0(x)$ – оператор Перрона – Фробениуса (5) для двоичного сдвига Бернулли, при выборе начального распределения в форме, *отличной* от равномерного закона

$$f_0(x) = \Theta_{0,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases} \quad (10)$$

Линейная функция. Выберем в качестве $f_0(x)$ линейную функцию:

$$f_0(x) = ax + b. \quad (11)$$

Выражение (11) должно удовлетворять условию нормировки, что дает определенную зависимость между конкретными значениями параметров a и b :

$$\int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 (ax + b) dx = \frac{a}{2} + b \equiv 1. \quad (12)$$

Используя (12), подействуем на вероятностную плотность (11) оператором (2), предварительно представив переменную x через первую собственную функцию ОПФ $B_1(x) = x - 1/2$. В результате итерационной процедуры получим:

$$P^{k+1} f_0(x) = P_B(P_B^k(ax + b)) = P(a\lambda_1^k B_1(x) + 1) = a\lambda_1^{k+1} B_1(x) + 1. \quad (13)$$

На графике 5 для значений $a = 2$, $b = 0$ отражен процесс быстрой (в силу того, что $\lambda_1^k \rightarrow 0$ с ростом k) эволюции начального линейного распределения (11) к равномерному распределению (10).

Квадратичная функция. Зададим начальное распределение в виде квадратического трехчлена:

$$f_0(x) = ax^2 + bx + c \quad (14)$$

с условием нормировки

$$\int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \equiv 1. \quad (15).$$

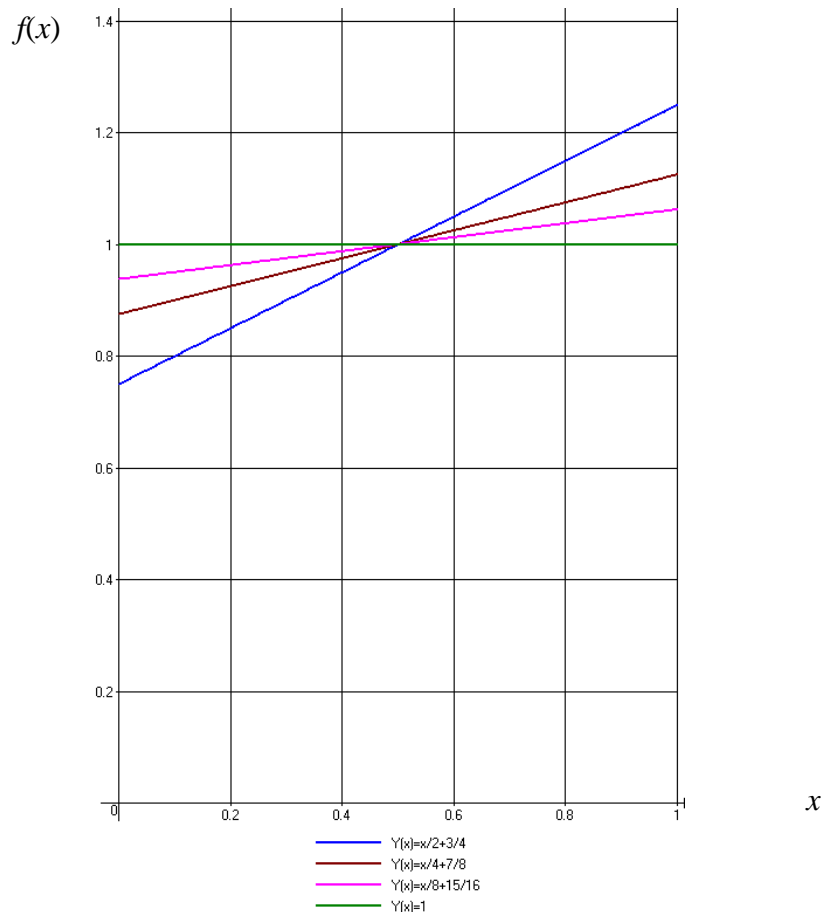


Рисунок 5 – Эволюция линейного распределения к равномерному: уменьшение наклона прямой с ростом числа итераций

Действие ОПФ (2) на функцию (14) с использованием выражений (6) для первых двух собственных функций ОПФ $B_1(x) = x - 1/2$ и $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ позволяет представить процесс сходимости к инвариантному распределению в виде:

$$P_B^k f_0(x) = P_B^k (ax^2 + bx + c) = a\lambda_2^k B_2(x) + (a+b)\lambda_1^k B_1(x) + 1. \quad (16)$$

На графике 6 представлены шаги эволюции вероятностного распределения к равномерному для значений параметров $a = 1, b = 1, c = 1/6$. Скорость быстрого приближения к инвариантному распределению определяется законом (1.44).

Общее решение. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении эволюции полинома произвольной степени к инвариантному распределению. Порядок аналитических вычислительных действий таков: выбирается начальное распределение в полиномиальной форме $f_0(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$, определяется условие нормировки; каждая степенная функция x^m в представлении начально-

го распределения заменяется выражением, следующим из полинома Бернулли m -го порядка; осуществляются действия оператора Перрона-Фробениуса.

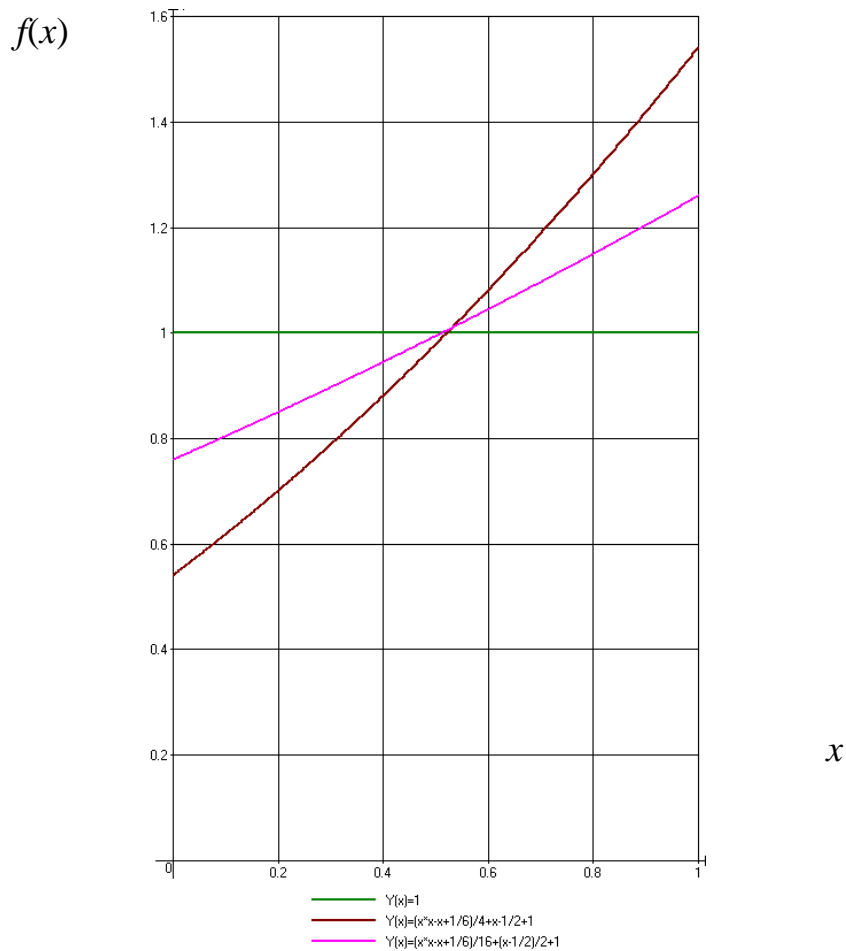


Рисунок 6 – Эволюция квадратичного начального распределения к равномерному: уменьшение наклона и «выпрямление» кривых с ростом числа итераций

Пирамидальное отображение. Действие ОПФ пирамидального отображения определяет соотношение (8). Линейное представление (11) для начальной плотности вероятности переводится в равномерное инвариантное распределение за единственную операцию:

$$P_T(ax+b) = \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{x}{2} \right) + b + a \left(1 - \frac{x}{2} \right) + b \right) = \frac{a}{2} + b \equiv 1. \quad (17)$$

В главе 2 представлен расчет асимптотического процесса сходимости к инвариантной плотности для отображения в форме квадратичного полинома Чебышева,

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \quad (18)$$

на основе точного траекторного решения для этого отображения, представленного в форме Шрёдера:

$$x_n = x_n(x_0, n) = \cos(2^n \arccos x_0). \quad (19)$$

Инвариантная плотность для отображения (18) имеет вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \quad (20)$$

Процесс сходимости к инвариантному распределению при начальном равномерном распределении $\rho_0(x) = 1/2$, $x \in (-1, 1)$, описывается формулой, содержащей первый замечательный предел:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2^n}{\sin(\pi/2^n)} \cos\left(\frac{\arccos x}{2^n} - \frac{\pi}{2^n}\right) \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (21)$$

Графически сходимость к инвариантной плотности отражена на рисунке 7.

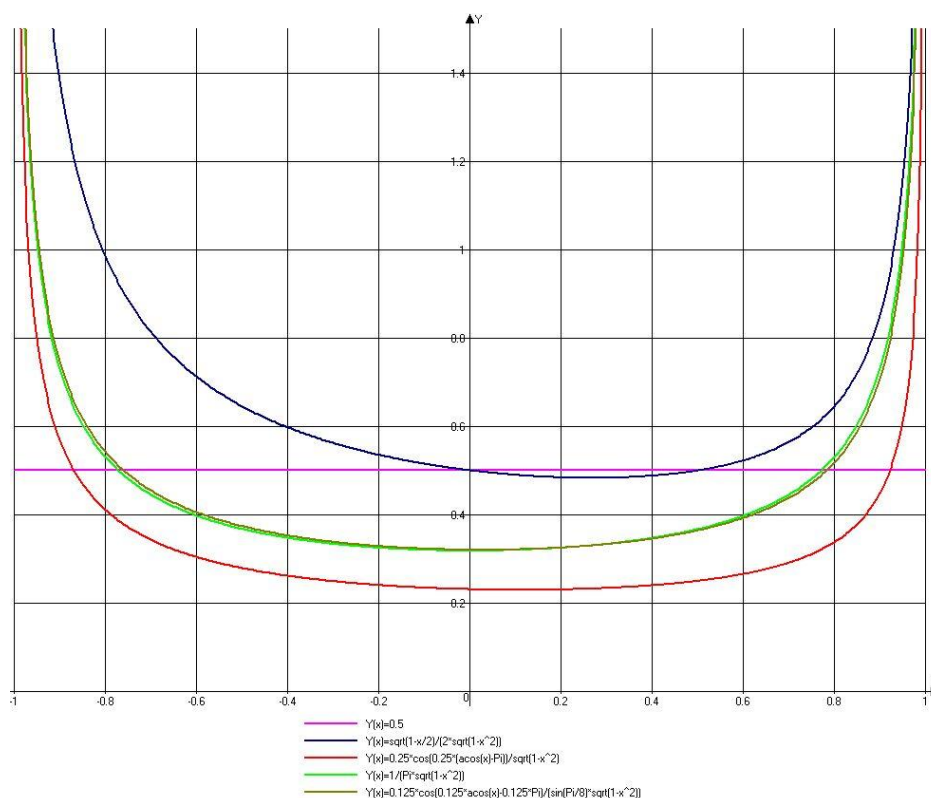


Рисунок 7 – Эволюция начального распределения к инвариантному (зеленая кривая) для полинома Чебышёва второго порядка

В главе 3 кратко рассмотрена история задачи Гаусса по исследованию сходимости начального равномерного распределения к инвариантному под действием отображения (рисунок 8)

$$x_{n+1} = Tx_n = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}, x \in \Omega \in (0,1), n = 0,1,2,\dots, \quad (22)$$

где фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа. На рисунке 9 даны графики инвариантной плотности отображения Гаусса и его функции распределения:

$$\rho(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}, \quad F(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{\ln 2} \ln(1+x) = \log_2(1+x). \quad (23)$$

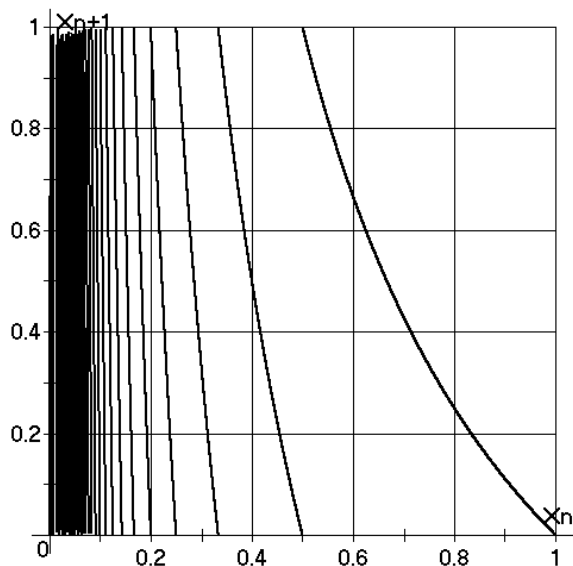


Рисунок 8 – Отображение Гаусса

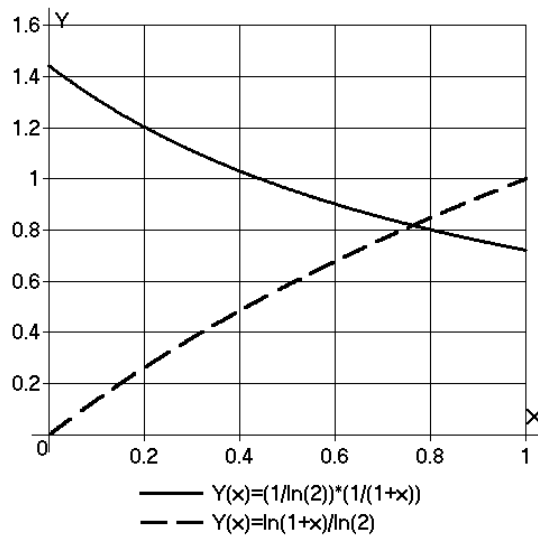


Рисунок 9 – Инвариантная плотность (сплошная линия) и закон распределения (пунктирная линия) отображения Гаусса

Оператор Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса имеет сложную структуру, обусловленную счетным количеством ветвей отображения:

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f\left(\frac{1}{x+k}\right). \quad (24)$$

Собственные значения оператора Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса (литературные данные и рассчитанные для ОПФ инверсного триадического сдвига Бернулли) приведены в таблице.

Таблица. Собственные числа операторов Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса [26] и триадического инверсного сдвига Бернулли

	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
Отображение Гаусса	-0.303663	0.10088	-0.03550	0.01284	-0.00472	0.00175
Инверсный сдвиг	-0.(3)	0.(1)	-0.(037)	0.012345679	-0.0041115	0.0013717

Собственное число, отвечающее инвариантной плотности, обозначено как $\lambda_1 = 1$. В первой строке представлены литературные данные. Собственные числа ОПФ *знакопеременны*. Во второй строке таблицы для сравнения приведены величины $(-1)^{n-1} 3^{-(n-1)}$. Это собственные числа оператора Перрона–Фробениуса для триадического инверсного сдвига Бернулли (рисунок 10):

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} -3\alpha_n + 1, & \alpha_n \in (0, 1/3), \\ -3\alpha_n + 2, & \alpha_n \in (1/3, 2/3), \\ -3\alpha_n + 3, & \alpha_n \in (2/3, 1). \end{cases} \quad (25)$$

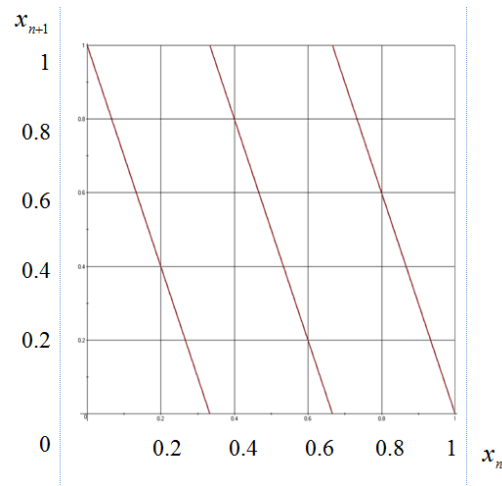


Рисунок 10 – Отображение $x_{n+1} = 1 - \{3x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Несмотря на крохотное отличие величин $(-1)^{n-1} 3^{-(n-1)}$ от первых собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса, речь не идет о буквальной эмуляции отображения Гаусса простым кусочно-линейным отображением. Здесь интересен качественный аспект: хаотические отображения с полными ветвями, имеющими «отрицательный» наклон, обладают в дискретном спектре оператора Перрона–Фробениуса *знакопеременными* собственными числами. На рисунке 11 отражены первые этапы процесса сходимости начального равномерного распределения к инвариантному распределению (23).

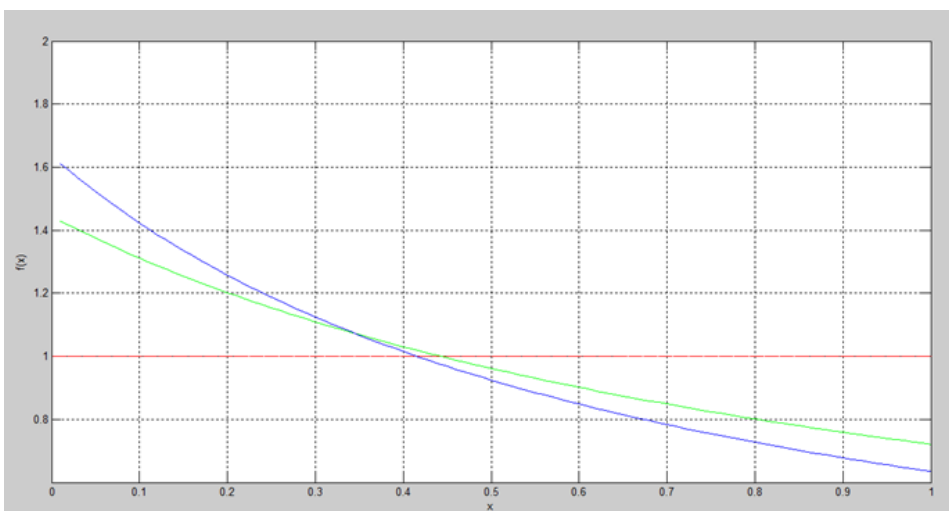


Рисунок 11. Плотность равномерного распределения (красная линия), инвариантная плотность отображения Гаусса (зеленая линия, точка пересечения ординаты $1/\ln 2$) и результат действия ОПФ на равномерное распределение

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены математические приемы аналитического исследования сходимости в динамических системах в форме одномерных хаотических отображений произвольных начальных распределений к инвариантным, что соотносится с термодинамическим понятием – установлением «равновесного состояния». Процессы сходимости в хаотических нелинейных системах описываются в контексте эволюции вероятностных распределений под действием соотносимого с отображением линейного несамосопряженного оператора Перрона-Фробениуса. Неподвижная точка оператора (в функциональном смысле) и является инвариантной плотностью (нулевой по индексу собственной функцией оператора) с собственным числом 1. Точные оценки для нестационарного процесса сходимости к равновесному состоянию на основе использования решения спектральной задачи для ОПФ в главе 1 демонстрируются для кусочно-линейных отображений с полными ветвями.

Знание точных траекторных решений для хаотических отображений позволяет также получить выражения для нестационарных вероятностных распределений. В главе 2 построено хаотическое, сопряженное кусочно-линейному, отображение в форме квадратичного полинома Чебышева первого порядка и найдены выражения для нестационарных и стационарного вероятностных распределений, характеризующий эволюционные процессы под действием оператора Перрона-Фробениуса.

В главе 3 приведен пример упрощенного подхода к решению сложной (как в аналитическом, так и в численном планах) задачи нахождения собственных функций и собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса для отображений сложной структуры. Продемонстрирован прием, основанный на использовании общих свойств собственных функций эволюционного оператора при одновременном соотнесении с решением спектральной задачи для более простых по структуре отображений. Например, сравнительная характеристика отображения Гаусса и триадического сдвига Бернулли позволила получить приближенную оценку для собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Рюэль Д. Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. М.; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 288 с. (пер. с англ: Ruelle D. Thermodynamic formalism: the Mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics. Addison Wesley Publishing Company, Reading. Mass., 1978. Pp. xix+183).
2. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи математических наук. 1984. Т. 39, вып. 3 (237). С. 3 – 37.
3. Mayer D.H., Roepstorff G. On the relaxation time of Gauss' continued fraction map. I: The Hilbert space approach (Koopmanism) // J. Stat. Phys. 1987. V. 47. P. 149-171.

4. Mayer D.H., Roepstorff G. On the relaxation time of Gauss' continued fraction map. II: The Banach space approach transfer operator method // J. Stat. Phys. 1988. V. 50. P. 331–344.
5. Mayer D.H. On the Thermodynamic Formalism for the Gauss Map // Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 311 – 333.
6. Beck C., Schlögl F. Thermodynamics of Chaotic System: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 286 p. (Cambridge Nonlinear Science Series. Issue 4).
7. Климонтович Ю. Л. Термодинамика хаотических систем // УФН. 1994. Т. 164, № 7. С. 783–784 (рецензия на статью [6]).
8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М. : Мир, 2002. 461 с.
9. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
10. Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С. Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2015. 96 с.
11. Lasota A., Mackey M. C. Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag 1994. xiv + 472 pp. (Applied Mathematical Sciences, vol. 97).
12. Аникин В.М. Спектральные задачи для оператора Перрона-Фробениуса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 61-74.
13. Аникин В. М., Ремизов А. С., Аркадакский С. С. Собственные функции и собственные числа оператора Перрона – Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62 – 75.
14. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 744 с.
15. Данилов Ю. А. Многочлены Чебышёва. Минск : Высшая школа, 1984. 157 с.
16. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 304 с.
17. Аникин В. М. Представление точных траекторных решений для одномерных хаотических отображений в форме Шрёдера // Известия вузов. Нелинейная прикладная динамика. 2023. Т. 31, № 2. С. 128 – 142.
18. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988. 240 с.
19. Аникин В. М. Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные характеристики. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2007. 80 с. (Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям «Физика» и «Физика открытых нелинейных систем»).
20. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 4-е изд. М.: Наука, 1972. 112 с.
21. Wirsing E. On the theorem of Gauss–Kuzmin–Levy and a Frobenius type theorem for function spaces // Acta Arithmetica. 1974. V. 24. P. 507–528.
22. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical Theory of Continued Fractions. Boston : Kluwer, Inc., 2002. Chps. 1, 2.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 6-е изд. М.: Наука, 1973. Гл. 14. Релятивистская космология.
24. Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии // УФН. 1970. Т. 102, вып. 3. С. 463–500.
25. Бабенко К.И., Юрьев С.П. Об одной задаче Гаусса. Препринт / ИПМ АН СССР. М.: 1977. № 63. 70 с.
26. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. В 3 т. Т. 2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М. : Вильямс, 2000. С. 407 – 411.