

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**Ламинарное конвективное течение на поверхности  
теплоизолированной вертикальной пластины,  
вызванное стационарным линейным источником тепла**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Шляхтина Максима Сергеевича

Научный руководитель  
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2023

## ВВЕДЕНИЕ

Основные уравнения теории пограничного слоя были установлены в 1904 году Л. Прандтлем. Вскоре после этого в 1907 году Г. Блазиус использовал эту теорию для первого в истории гидроаэродинамики рационально обоснованного метода расчета сопротивления трения. Благодаря существенному вкладу, сделанному Т. Карманом, предложившим в 1921 году простой способ приближенный метод пограничного слоя, идея пограничного слоя быстро распространились в кругах инженеров и заняли заслуженное место в разнообразных практических применениях.

Расцвет теории пограничного слоя относится к последнему десятилетию 20 века, в связи с переходом к сверхзвуковым и гиперзвуковым скоростям полета. Этот этап развития авиационной и ракетной техники поставил перед конструкторами и учёными много новых комплексных физических задач.

Ламинарное конвективное течение является одним из важнейших явлений в гидродинамике и теплопередаче. Применение этого явления выходит за рамки лежащих в его основе физических законов, а также успешно используется в различных областях промышленности и технологии.

Интерес к ламинарному конвективному течению на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины, вызванному стационарным линейным источником тепла, связан с его важной ролью в задачах теплообмена и гидродинамики, а также с различными практическими задачами, например, в теплоизоляции, автомобильной промышленности и т.д.

Ламинарное конвективное течение на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины играет важную роль в переносе тепла. При нагревании поверхности пластины тепло передается в окружающую среду, и возникает движение жидкости (обычно воздуха) вокруг пластины. Это движение называется конвекцией и может быть ламинарным или турбулентным, в зависимости от условий.

Ламинарная конвекция на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины обычно происходит при низкой скорости потока и характеризуется плавным движением воздуха. Это движение способствует перенос тепла от поверхности пластины в окружающую среду, что может быть важным для регулирования температуры на поверхности пластины.

Кроме того, ламинарное конвективное течение может влиять на теплообмен между поверхностью пластины и воздушным потоком, что может быть важным при проектировании теплообменных устройств, таких как радиаторы и теплообменники.

В целом, ламинарное конвективное течение является важным явлением в гидродинамике и теплопередаче, которое находит свое применение в различных отраслях науки и техники – от теплообмена в турбинах до проектирования систем охлаждения и кондиционирования воздуха.

**Целью работы** является изучение задачи о ламинарном течении жидкости и изменении ее температуры вблизи теплоизолированной вертикальной пластины, вызванного стационарным линейным источником тепла.

**Задача** состоит в решении системы уравнений, описывающей течение в окрестности теплоизолированной вертикальной пластины, с граничными условиями вблизи поверхности пластины и вдали от нее.

В бакалаврской работе рассматривается задача о ламинарном конвективном течении на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины, вызванное стационарным линейным источником тепла.

Численное решение данной задачи представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге–Кутты 4-ого порядка, реализованного с применением языка программирования Python.

Бакалаврская работа состоит из трех разделов.

**В первом разделе** рассматривается ламинарное конвективное течение на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины, вызванное стационарным линейным источником тепла, когда жидкость является обычной ньютоновской несжимаемой жидкостью.

**В подразделе 1.1** дается физическая постановка задачи.

**В подразделе 1.2** дается математическая постановка задачи, выписаны основные уравнения, описывающие пограничный слой в случае ньютоновских жидкостей, начальные и граничные условия.

**В подразделе 1.3** описывается переход к автомоделным переменным и сформулирована краевая задача в автомоделных переменных.

**В подразделе 1.4** показан численный метод решения задачи, который является методом Ньютона в комбинации с методом Рунге–Кутты 4–го порядка.

**В подразделе 1.5** представлены результаты расчетов в виде графиков.

**Во втором разделе** рассматривается течение вблизи поверхности пластины, когда жидкость является степенной ньютоновской жидкостью.

**В подразделе 2.1** дается математическая постановка задачи, выписаны основные уравнения, описывающие пограничный слой в случае неньютоновской жидкости, начальные и граничные условия.

**В подразделе 2.2** описывается переход к автомодельным переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных.

**В подразделе 2.3** показан численный метод решения задачи, который является методом Ньютона в комбинации с методом Рунге–Кутты 4–го порядка.

**В подразделе 2.3** представлены результаты расчетов в виде графиков.

**В третьем разделе** рассматриваются результаты экспериментального исследования конвективного факела над тонкой горизонтальной проволокой, нагреваемой постоянным током в воздухе и воде.

В вязкую теплопроводную несжимаемую жидкость с температурой  $T_\infty$ , вертикально помещена теплоизолированная пластина.

Требуется изучить течение на поверхности пластины, когда окружающая жидкость является:

1. ньютоновской;
2. степенной неньютоновской с нелинейной теплопроводностью.

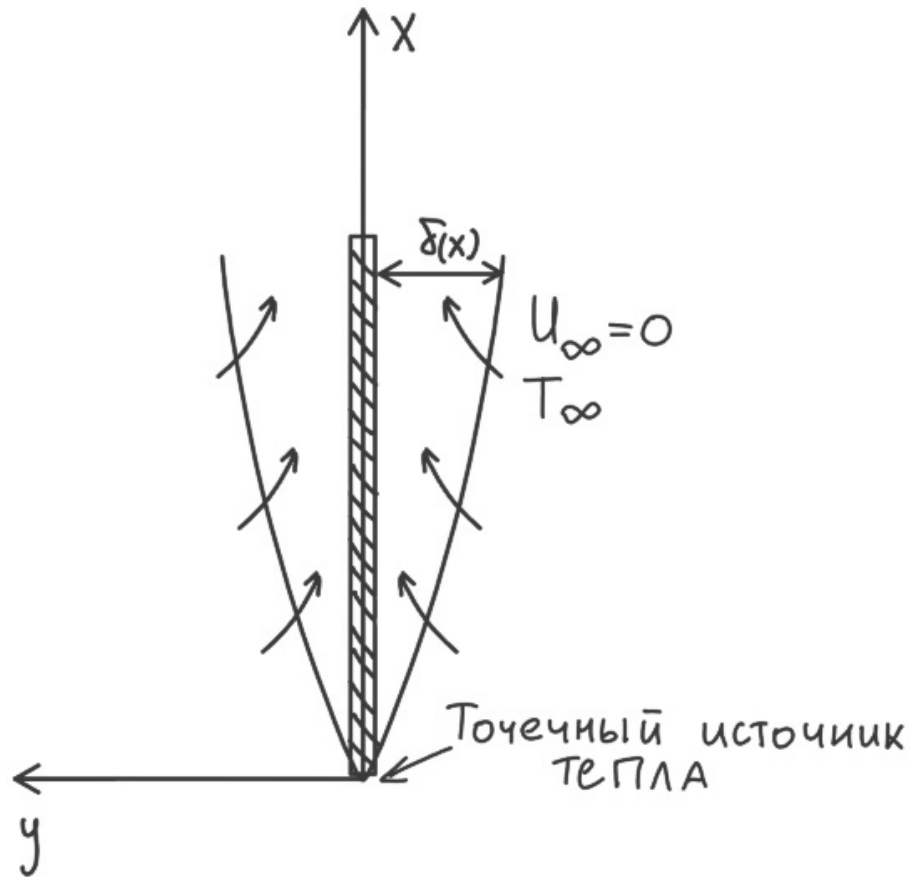


Рисунок 1 — Схема течения вблизи поверхности пластины

Ось  $Ox$  направим вдоль поверхности пластины вверх, ось  $Oy$  направим перпендикулярно пластине влево. Вдоль оси  $Oz$  течение будет считаться неограниченным, поэтому от координаты  $z$  решение зависеть не будет. Требуется изучить поля скорости и температуры в пограничном слое. При этом пограничный слой показан сплошной линией. Схема течения изображена в соответствии с рисунком 1.1.

**В первом разделе** рассмотрена в приближении пограничного слоя задачу о свободной конвекции от горизонтального линейного источника тепла, расположенного на вертикальной пластине с теплопроводностью, равной нулю. Записаны уравнения конвективного пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta T, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

с граничными и интегральными условиями:

$$u = \vartheta = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (y = 0), \quad (4)$$

$$u = T = 0, \quad (y = \infty), \quad (5)$$

$$\rho c_p \int_0^\infty u T dy = \text{const}(x) \equiv q. \quad (6)$$

Переходим к автомодельным переменным:

$$x = L\bar{x}, \quad y = Y\bar{y}, \quad (7)$$

$$u = U\bar{u}, \quad v = V\bar{v}, \quad (8)$$

$$T = \theta\bar{T}. \quad (9)$$

Необходимо ввести функцию тока и найти масштабы функции  $\psi$  :

$$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}). \quad (10)$$

Вычислим компоненты вектора скорости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11)$$

Получим:

$$u = \left(\frac{qg\beta}{\rho c_p \sqrt{\vartheta}}\right)^{\frac{2}{5}} x^{\frac{1}{5}} f'(\xi), \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{5} \left(\frac{qg\beta\vartheta^2}{\rho c_p}\right)^{\frac{1}{5}} x^{-\frac{2}{5}} [2\xi f'(\xi) - 3f(\xi)]. \quad (13)$$

Выполняя преобразования, получим дифференциальные уравнения, для определения  $f$  и  $t$ :

$$f''' + \frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 + t = 0, \quad (14)$$

$$t'' + \frac{3}{5} Pr f t' = 0. \quad (15)$$

где  $Pr = \frac{\lambda}{\rho C_p \mu}$  – число Прандтля.

Граничные условия:

$$\xi = 0 : \quad f(0) = f'(0) = t'(0) = 0, \quad (16)$$

$$\xi \rightarrow \infty : \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \infty} = t|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} t f' d\xi = 1. \quad (18)$$

Обсудим численное решение системы уравнений (14) и (15). ОДУ (3) является ОДУ 3–го порядка относительно функции  $f$ , а ОДУ (15) ОДУ 2–го порядка относительно функции  $t$ . Для численного интегрирования этих уравнений на полуинтервале  $[0, \infty]$ , необходимо наличие пяти начальных условий, а именно, при  $\xi = 0$  необходимо знать:

$$f(0) = f_{00}, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f_{10}, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = f_{20}, \quad t(0) = t_{00}, \quad \left. \frac{dt}{d\xi} \right|_{\xi=0} = t_{10}.$$

Однако известны только три условия. Значения  $f_{20}$  и  $t_{10}$  необходимо определить. Они должны быть такими, чтобы при  $\xi \rightarrow \infty$  выполнялись условия  $f'|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  и (18). Условие  $t'|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  использовать нельзя, так как оно не является независимым.

Для реализации численного интегрирования вместо полуинтервала  $[0, \infty)$  рассматривается интервал  $[0, \eta_m]$ , где  $\eta_m$  – достаточно большое число. Условие  $f'|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  при этом заменяется условием:

$$\eta = \eta_m (\eta_m \gg 1) : \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_m} = f_{1m} = 0. \quad (19)$$

Условие (18) заменяется условием  $I_m = \int_0^{\xi_m} t f' d\xi = 1$ .

Обозначим  $f_{1m}^i$  – значение производной  $\frac{df}{d\xi}$  при  $\xi = \xi_m$ , а  $I_m^i$  – значение интеграла  $I$ , полученные при некоторых значениях  $f_{20}^i$  и  $t_{10}^i$ , где  $i$  – номер итерации.

Разности

$$N_1^i(f_{20}^i, t_{00}^i) = f_{1m}^i - f_{1m} = f_{1m}^i, \quad (20)$$

и

$$N_2^i(f_{20}^i, t_{00}^i) = I_m^i - I_m = I_m^i - 1. \quad (21)$$

будем называть невязками.

Пусть

$$R^i = \sqrt{(N_1^i)^2 + (N_2^i)^2},$$

тогда решение краевой задачи сводится к минимизации значения  $R^i$ , то есть при некотором значении  $i = M$ , необходимо получить  $R^i < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – точность решения.

Остаётся вопрос о том, как выбирать очередные приближения  $f_{20}^i$  и  $t_{00}^i$ . Ответ на него определяется выбором метода решения краевой задачи.

Для решения краевой задачи для системы (14) и (15) был применен метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Блок-схема алгоритма решения приведена в соответствии с рисунком 1.

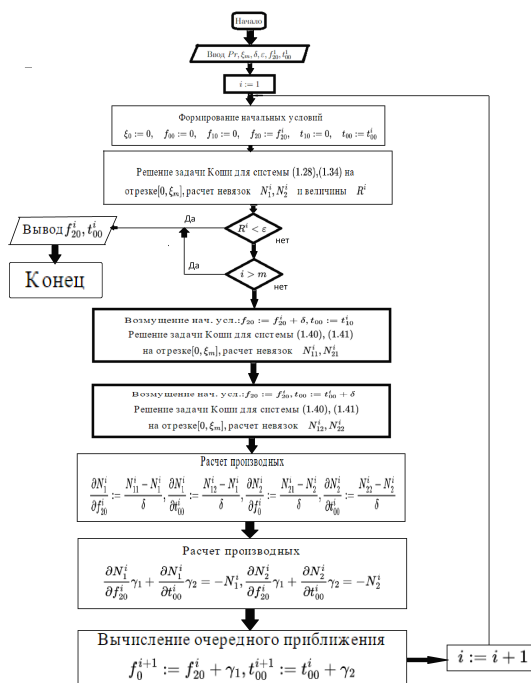


Рисунок 2 — Блок-схема алгоритма численного решения



**Во втором разделе** рассмотрено течение степенной неньютоновской жидкости. Это течение в приближении пограничного слоя свободной конвекции от горизонтального линейного источника тепла, расположенного на вертикальной пластине с теплопроводностью, описывается системой уравнений:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu^*}{\rho} n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} + g\beta T, \quad (22)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda^*}{\rho} m \frac{\partial T^2}{\partial y^2} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

с граничными и интегральными условиями:

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (y = 0), \quad (25)$$

$$u = T = 0, \quad (y = \infty), \quad (26)$$

$$pc_p \int_0^\infty uT dy = \text{const}(x) \equiv q. \quad (27)$$

Переходим к автомодельным переменным:

$$x = L\bar{x}, \quad y = Y\bar{y}, \quad (28)$$

$$u = U\bar{u}, \quad v = V\bar{v}, \quad (29)$$

$$T = \theta\bar{T}. \quad (30)$$

Необходимо ввести функцию тока и найти масштабы функции  $\psi$ :

$$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}). \quad (31)$$

Вычислим компоненты вектора скорости:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (32)$$

Получим:

$$u = \rho^{-\frac{2n-1}{4n+1}} C_p^{-\frac{2n-1}{4n+1}} q^{\frac{2n-1}{4n+1}} g^{\frac{2n-1}{4n+1}} \beta^{\frac{2n-1}{4n+1}} \xi^{\frac{2n+1}{4n+1}} \nu^{*\frac{2n}{4n+1}} n^{\frac{2n}{4n+1}}, \quad (33)$$

$$v = Ax^{\frac{2n+1}{4n+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{n+1}{4n+1} B y x^{-\frac{n+1}{4n+1}-1} - \frac{2n+1}{4n+1} Ax^{\frac{2n+1}{4n+1}} \varphi(\xi), \quad (34)$$

где  $A = \frac{C_p^{\frac{1-2n}{4n+1}} \nu^{*\frac{2}{4n+1}} \rho^{\frac{1-2n}{4n+1}}}{g^{\frac{1-2n}{4n+1}} q^{\frac{1-2n}{4n+1}} \beta^{\frac{1-2n}{4n+1}}}$ ,  $B = \left( \left( \frac{gq\beta}{C_p\rho} \right)^{\frac{n-2}{4n+1}} \nu^{*\frac{3}{4n+1}} \right)^{-1}$ .

Выполнив преобразования, получим дифференциальные уравнения:

$$\frac{\left( \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) (2n+1)f}{1+4n} + \left( \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)^{n-1} \left( \frac{d^3 f}{d\eta^3} \right) - \frac{n \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2}{1+4n}, \quad (35)$$

$$(2n+1)f \left( \frac{dt}{d\eta} \right) + (2n+1)t \left( \frac{df}{d\eta} \right) + \frac{(1+4n)^2 \rho^{-\frac{4+n}{3n+2}}}{3n+2} * \\ * \frac{C_p^{-\frac{4+n}{3n+2}} q^{-\frac{2(n-1)}{3n+2}} g^{-\frac{3(n-1)}{3n+2}} \beta^{-\frac{3(n-1)}{3n+2}} \nu^{*-\frac{5}{3n+2}} n^{-\frac{5}{3n+2}} \left( \frac{dt}{d\eta} \right)^{\frac{n-1}{3n+2}} \left( \frac{d^2 t}{d\eta^2} \right) \lambda^*}{3n+2}. \quad (36)$$

Перейдем в граничных условиях к автомодельным переменным. Выполнив преобразования, получим:

$$\xi = 0 : \quad f(0) = f'(0) = t'(0) = 0, \quad (37)$$

$$\xi \rightarrow \infty : \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \infty} = t|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (38)$$

$$\int_0^\infty t f' d\xi = 1. \quad (39)$$

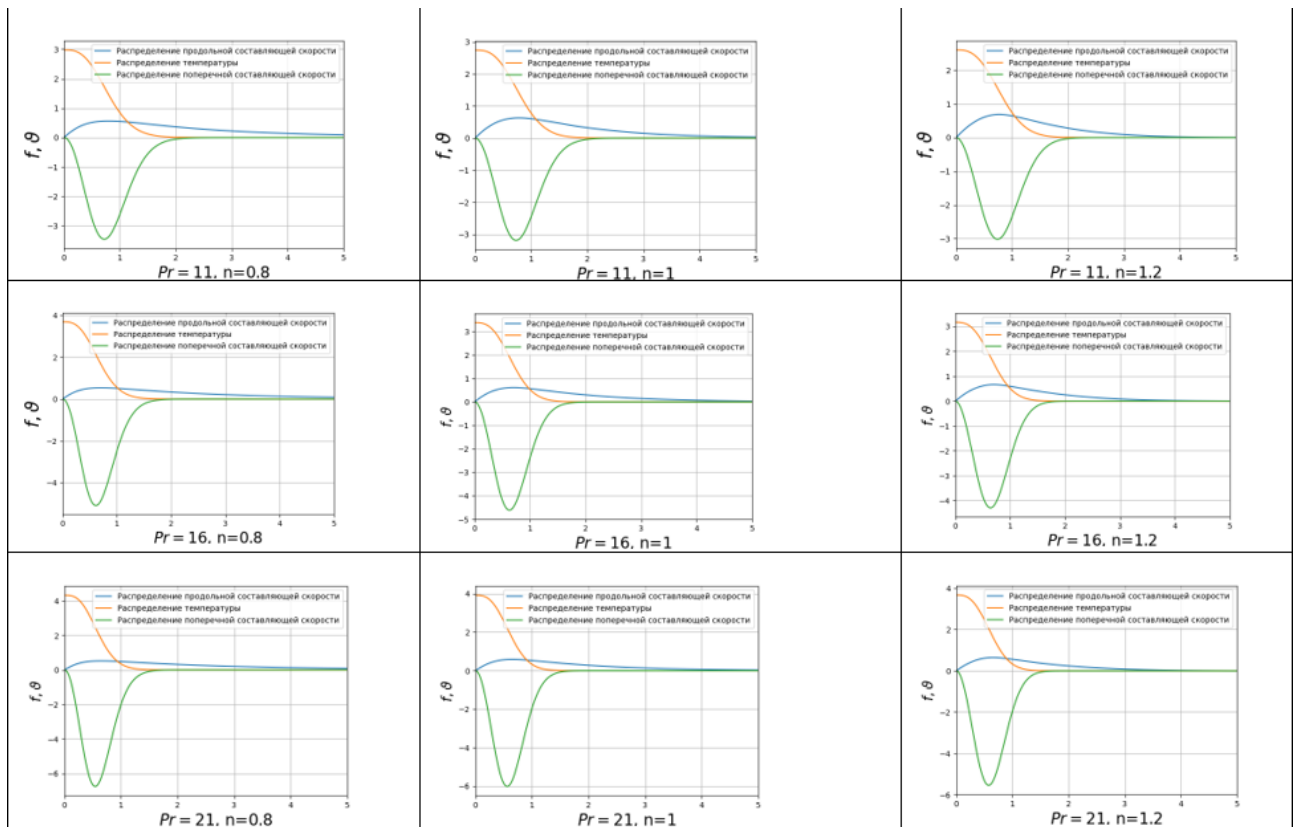


Рисунок 3 — Распределения величин при разных значениях  $Pr$  и  $n$

### Заключение

Решена задача о ламинарной конвекции на поверхности теплоизолированной вертикальной пластины как для случая ньютоновских, так и для случая неньютоновских сред. Эта задача является автомодельной.

Выполнен переход к автомодельным переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сводится к решению системы ОДУ для автомодельных представителей функции тока и температуры с граничными условиями на пластине и вдали от пластины.

Для решения задачи применен численный метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Решение задачи представлено в виде графиков.