МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Первое дифференциальное приближение для метода Рунге-Кутты применительно к задаче с пограничным слоем

АВТОРЕФЕРАТ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Тимофеева Александра Анатольевича

Научный руководитель
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент Ю.А. Блинков

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент Ю.А. Блинков

Саратов 2023

Введение. Объектом исследования работы являются задачи с пограничным слоем и методы их решения. Предмет исследования – совершенствование численного решения задач с пограничным слоем.

Актуальность работы заключается в необходимости разработки программного решения задачи с пограничным слоем методом Рунге-Кутты и построение первого дифференциального приближения для возможности аналитического исследования численного решения.

Также первое дифференциальное приближение является важной техникой при решении дифференциальных уравнений, которые описывают динамику процессов во многих научных областях. Благодаря простоте расчетов и достаточной точности результатов, метод первого дифференциального приближения является незаменимым инструментом для исследования многих природных явлений и технических процессов.

Практическая значимость исследования определяется возможностью использования полученных результатов и в качестве основы для изучения похожих задач приближенных к реальным вопросам современной теории.

Цель исследования – автоматизировать процесс построения первого дифференциального приближения для метода Рунге - Кутты применительно к задаче с пограничным слоем. В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие

1. Изучить и проанализировать специальную литературу информационно прикладного характера,
2. Выбрать и изучить пример задачи с пограничным слоем,
3. Построить точное решение задачи с пограничным слоем и разработать соответствующее программное обеспечение,
4. Разработать программное обеспечение решения задачи с пограничным слоем методом Рунге-Кутты,
5. Построить первое дифференциальное приближение метода Рунге–Кутты и разработать соответствующее программное обеспечение,
6. Проанализировать эффективности предложенных программных продуктов,
7. Провести оценку точности решения,
8. Обобщить материал, сделать выводы.

Структура бакалаврской работы. В бакалаврской работе содержится введение, 2 раздела, 7 подразделов и заключение:

1. В введении рассматриваются основные понятия темы бакалаврской работы, ставится цель работы и описывается её содержание.
2. В первом разделе освещается принцип работы метода Рунге - Кутты.
3. Во втором разделе рассматриваются основные понятия первого дифференциального приближения.
4. В третьем разделе рассматриваются основные понятия задачи с погранисчным слоем на примере конкретной задачи с пограничным слоем.
5. В четвертом разделе рассматривается решение задачи с пограничным слоем.
6. В пятом разделе представлена программная реализация построения точного решения выбранной задачи с пограничным слоем.
7. В шестом разделе с помощью языка программирования Python3 реализован метод Рунге - Кутты и проведена примерная оценка его погрешности.
8. В седьмом разделе описывается построение первого дифференциального приближения средствами языка программирования Python3.
9. В заключении указаны задачи, которые были достигнуты по итогам бакалаврской работы.

В первом разделе, рассматривается метод Рунге-Кутты и общие понятия первого дифференциального приближения, представлена конкретная задача с пограничным слоем и рассматривается пример решения задачи, выводятся все расчетные формулы. Во втором разделе представлено точное решение задачи с пограничным слоем, описана программа поиска значений точного решения, рассмотрена работа метода Рунге-Кутты четвертого порядка для решения конкретной задачи, описана программа для поиска значений метода и поведен сравнительный анализ полученных значений и значений точного решения, описан процесс построения первого дифференциально приближения с помощью системы компьютерной алгебры и проведен сравнительный анализ полученных результатов.

Основное содержание бакалаврской работы. В данной работе рассматривается принцип построения первого дифференциального приближения для метода Рунге - Кутты применительно к задаче с пограничным слоем и его програмная реализация.

Метод Рунге - Кутты является одним из самых эффективных численных методов решения дифференциальных уравнений. Это численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), который позволяет приближенно решать ОДУ без необходимости нахождения их аналитического решения. Метод Рунге - Кутты базируется на идее аппроксимации значений функции в промежуточных точках на отрезке, на котором рассматривается ОДУ.

Суть метода Рунге - Кутты заключается в последовательном вычислении приближенных значений функции в заданных точках с использованием различных формул, которые обеспечивают высокую точность при минимальной вычислительной сложности.

Для задачи Коши

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

расчетные формулы имеют следующий вид:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{1}$$

где

$$k_1 = f(x_m, y_m); k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_1}{2}); k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_2}{2});$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3); x_{m+1} = x_m + h;$$

Первое дифференциальное приближение для метода Рунге - Кутты используется для оценки погрешности, которая возникает в результате численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. Эта ошибка обусловлена тем, что для приближения значения функции на следующем шаге используется информация только о значении функции и ее производной на текущем шаге.

Для вычисления первого дифференциального приближения используется формула:

$$y_{m+1}^{(1)} = y_m + h \cdot f(y_m, x_m), \tag{2}$$

где y_m и x_m – значение функции и ее аргумента на текущем шаге, $f(y_m, x_m)$ – значение производной функции на текущем шаге, h – размер шага.

Это приближение используется для вычисления погрешности, которая вычисляется по формуле:

$$\Delta = \frac{y_{m+1} - y_{m+1}^{(1)}}{h} \cdot 100\%, \tag{3}$$

где y_{m+1} – значение функции на следующем шаге.

Если погрешность получается слишком большой, то размер шага уменьшается, чтобы улучшить точность вычислений. Если погрешность достаточно мала, то размер шага может быть увеличен, чтобы сократить время вычислений.

В качестве задачи с пограничным слоем рассмотрим задачу поиска толщины пограничного слоя. Толщина пограничного слоя – это расстояние от поверхности твердого тела, где скорость жидкости или газа равна нулю, до места, где она достигает своей максимальной скорости вблизи поверхности тела.

Формула Ньютона для силы внутреннего трения при ламинарном течении

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \frac{\partial V}{\partial n},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжения силы трения, μ – коэффициент вязкости , $\frac{\partial V}{\partial n}$ – градиент скорости упорядоченного движения, показывает, что внутри пограничного слоя силой внутреннего трения пренебрегать нельзя, и среду, движущуюся внутри этих областей, следует считать вязкой даже при малых значениях коэффициента вязкости.

Для исследования движения в областях с большими градиентами скорости необходимо использовать уравнения Навье–Стокса. Благодаря малой толщине пограничного слоя дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости значительно упрощаются.

При удалении от поверхности тела скорость течения увеличивается и асимптотически приближается к V_∞, поэтому толщина пограничного слоя величина достаточно условная.

Обычно за толщину пограничного слоя δ в данной точке поверхности принимают расстояние от тела до такой точки, в которой действительная скорость потока V_x отличается от скорости в потенциальном течении U на 1%:

$$\left(\frac{V_x}{U}\right)_{y=\delta} = 0,99.$$

Толщина пограничного слоя δ зависит от положения точки на поверхности тела. На острой передней кромке $\delta = 0$ и растет с удалением от передней кромки.

Согласно рисунку 1, рассмотрим установившийся плоский пограничный слой. Выделим в пограничном слое малый объем $ABCD$. Применим к данному объему теорему об изменении количества движения. Вычислим изменение количества движения в направлении оси за промежуток времени dt.

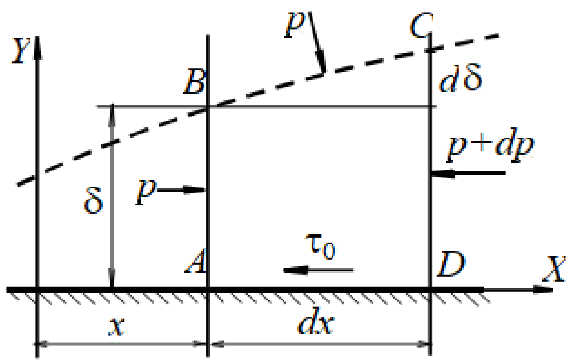


Рисунок 1 — Плоский пограничный слой

Приравняв изменение количества движения жидкости в объеме $ABCD$ суммарному импульсу от сил давления и трения, получаем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho V_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho V_x dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0. \qquad (4)$$

Соотношение (4) называют интегральным соотношением пограничного слоя. Оно пригодно для изучения как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев.

В качестве примера решения задачи с пограничным слоем рассмотрим решение задачи об обтекании плоской пластинки. Найденная для пластинки зависимость $\delta = \delta(x)$ и величина коэффициента сопротивления трения могут быть использованы при приближенных расчетах других удобообтекаемых тел.

Задача расчета пограничного слоя в несжимаемой среде сводится к определению закона изменения толщины пограничного слоя, то есть $\delta = \delta(x)$, и силы сопротивления трения F_{TP} при условии, что известны скорость V_∞, величина коэффициента кинематической вязкости и хорда пластинки b.

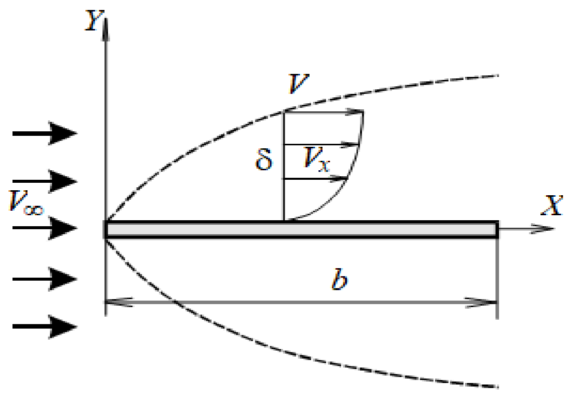


Рисунок 2 — Пограничный слой на плоской пластинке

Согласно рисунку 2 для плоской пластинки скорость потенциального течения $U = V_\infty$, градиент давления вдоль пластинки $\frac{dp}{dx} = 0$ (пластинка – тело с нулевым градиентом давления вдоль ее хорды).

С учетом вышеизложенного интегральное соотношение (4) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho V_x^2 dy - V_\infty \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho V_x dy = -\tau_0. \qquad (5)$$

Для решения задачи о пограничном слое введем дополнительно еще два соотношения:

1. закон распределения скорости по толщине пограничного слоя $V_x = V_x(y)$;
2. уравнение, связывающее касательное напряжение на стенке τ_0 с толщиной пограничного слоя δ.

Определим их из граничных кинематических и динамических условий:

Кинематические граничные условия:

1. при $y = 0$, $(V_x)_{y=0} = 0$;
2. при $y = \delta$, $(V_x)_{y=\delta} = V_\infty$.

При $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $p = p(x)$ и $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$. Получим уравнения, описывающие движение в пределах пограничного слоя:

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Динамические граничные условия:

1. при $y = 0$, $V_x = V_y = 0$, и из первого уравнения системы (6) для пограничного слоя получаем

$$\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx},$$

но $\frac{dp}{dx} = 0$, и тогда

$$\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = 0;$$

2. при $y = \delta$, сила трения становится равной нулю, т. е. касательные напряжения $\tau = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}$ обращаются в ноль, и отсюда

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0.$$

Значения коэффициентов:

$$a = 0, b = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2}, c = 0.$$

Следовательно, закон распределения скорости по сечению ламинарного пограничного слоя принимает вид

$$\frac{V_x}{V_\infty} = \frac{1}{2}\left(3\frac{y}{\delta} - -\frac{y^3}{\delta^3}\right). \tag{7}$$

Выражение для τ_0 получим из закона Ньютона для внутреннего трения при ламинарном течении:

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{8}$$

Из уравнения (7) производная

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{V_\infty}{\delta}\left(1 - \frac{y^2}{\delta^2}\right),$$

отсюда:

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}. \tag{9}$$

Вычислим интегралы, входящие в интегральное соотношение:

$$\int_0^\delta \rho V_x dy = \frac{\rho V_\infty}{2}\int_0^\delta \left(3\frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3}\right) dy = \frac{5}{8}\rho V_\infty \delta \tag{10}$$

и

$$\int_0^\delta \rho V_x^2 dy = \frac{\rho V_\infty}{4}\int_0^\delta \left(3\frac{y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3}\right)^2 dy = \frac{17}{35}\rho V_\infty^2 \delta. \tag{11}$$

Подставив эти интегралы в интегральное соотношение (5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{17}{35}\rho V_\infty^2\frac{d\delta}{dx} - \frac{5}{8}\rho V_\infty\frac{d\delta}{dx} = -\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{\delta}. \tag{12}$$

Решим уравнение (12).

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2\left(\frac{5}{8} - \frac{17}{35}\right)}\frac{\nu}{V_\infty \delta}. \tag{13}$$

В таком случае точное выражение

$$\delta(x) = 4.64x\sqrt{\frac{1}{Re_x}}. \tag{14}$$

Для поиска толщины пограничного слоя $\delta(x)$, при числе Рейнольдса $Re_x = 10^6$, соответствующему обтеканию воздухом крыла самолета ламинарным потоком при $x = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0.001$ опишем функцию на языке программирования Python3:

```
from math import sqrt
Re = 10**6
h = 0.001


def delt(x):
    return sqrt( (3*x) /( Re * (5/8 - 17/35))   )
```

В соответствии с рисунком 3, на отрезке $x = [0, 1]$ с шагом $h = 0.01$ точные значения толщины пограничного слоя ламинарного потока описываются функцией (14).

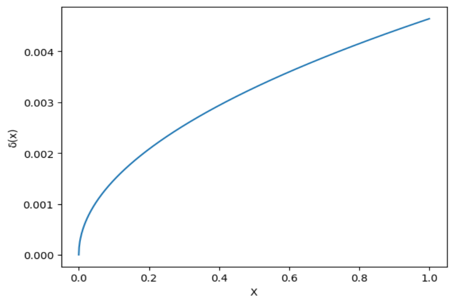


Рисунок 3 — Ламинарный пограничный слой крыла самолёта

Рассмотрим (13) для построения схемы решения методом Рунге - Кутты. Заменим все константные значения за новую константу

$$C = \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{5}{8} - \frac{17}{35}\right)}\frac{\nu}{V_\infty}.$$

Таким образом, уравнение (13) примет вид $y' = \frac{C}{y}$, $y(0) = 0$. Разностная схема (1) для которого примет вид:

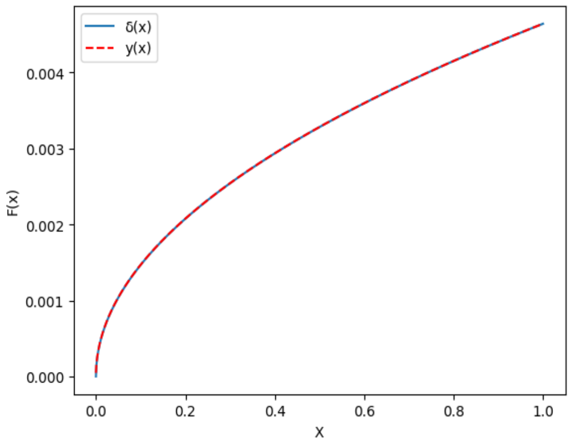
$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{15}$$

где

$$k_1 = f(y_m; k_2 = f(y_m + \frac{hk_1}{2}); k_3 = f(y_m + \frac{hk_2}{2});$$

$$k_4 = f(y_m + hk_3); x_{m+1} = x_m + h;$$

В соответствии с рисунком 4, график функции полученный методом Рунге - Кутты четвертого порядка визуально похож на график точной функции на этом же отрезке.



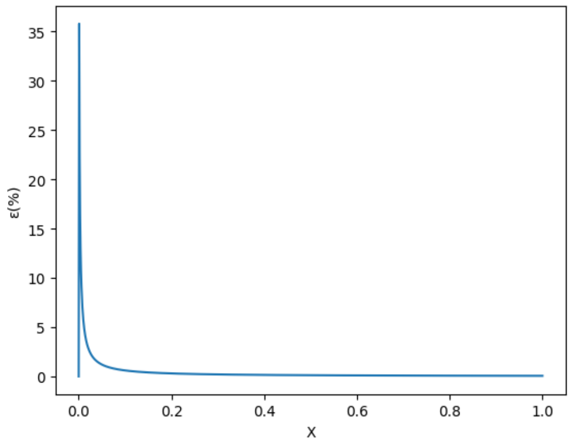


Рисунок 4 — Сопоставление значений.

Рисунок 5 — Относительная погрешность метода.

Попробуем провести оценку точности с помощью расчета относительной погрешности

$$\varepsilon = \frac{|\delta(x) - y(x)|}{|y(x)|} \cdot 100\%$$

В соответствии с рисунком 5, относительная погрешность метода Рунге - Кутты достигает 37%.

Построение первого дифференциального приближения полностью выполнено программно. Описывается разностная схема (2).

В соответствии с рисунком 6, графики точного решения и первого дифференциального приближения и значений метода Рунге–Кутта визуально совпадают.

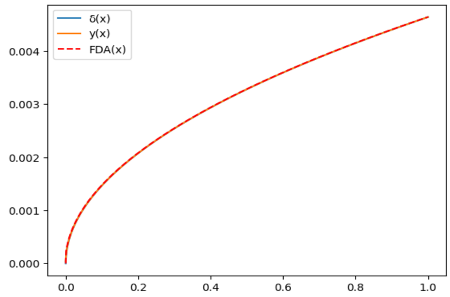


Рисунок 6 — Сопоставления значений.

Относительная погрешность метода не превышает 9.5%.

В соответствии с рисунком 7, проведена оценка погрешности метода метода Рунге - Кутты четвертого порядка по формуле (3).

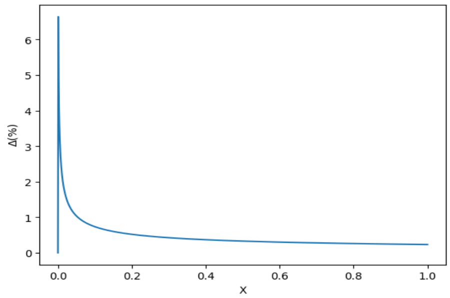


Рисунок 7 — Истинная погрешность метода Рунге - Кутты четвертого порядка.

Таким образом, истинная погрешность метода не превышает 7%.

Заключение.В настоящей работе рассмотрена проблема построения численного решения дифференциальных уравнений для задач с пограничным слоем методом Рунге-Кутты четвёртого порядка. В работе была продемонстрирована суть метода Рунге-Кутты четвертого порядка, приведены расчетная формула и объяснение принципа работы метода через геометрическое представление. Кроме того, было показано, что для оценки погрешности решений задач выбранного типа актуальным является применение первого дифференциального приближения. На рассмотренном примере приближения для уравнения переноса, была представлена расчетная формула для метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Описанный способ вычисления погрешности метода с помощью первого приближения был использован применительно к решению задачи об обтекании плоской пластинки.

Таким образом, для достижения поставленной в нашей работе цели

- был выбран и исследован пример задачи с пограничным слоем,,
- построено точное решение задачи с пограничным слоем и разработано соответствующее программное обеспечение,
- разработано программное обеспечение решения задачи с пограничным слоем методом Рунге - Кутты,
- построено первое дифференциальное приближение метода Рунге - Кутты и разработано соответствующее программное обеспечение,
- произведена оценка погрешности метода Рунге - Кутты примененного к задаче с пограничным слоем.

По итогам проделанной работы можно сделать вывод о том, что разработанное программное решение является функционирующим. Предложенный вариант даёт удовлетворительную корреляцию между точным решением задачи об обтекании плоской пластинки и решением ее методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Разработанная программа является удобным инструментом для построения первого дифференциального приближения метода Рунге-Кутты применительно к задаче с пограничным слоем и оценки погрешности работы этого метода.