МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Решение задачи о естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при больших и малых значениях чисел Прандтля

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Игонина Даниила Михайловича

Научный руководитель
старший преподаватель В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент Ю.А. Блинков

Саратов 2023

Введение. В последние годы значительно расширился круг задач, в основе которых лежат свободные конвективные течения. Естественная конвекция сплошной среды как один из видов макроскопического движения интенсивно изучается в современной фундаментальной науке. Экспериментальные и теоретические исследования естественной конвекции привели к ее выделению в самостоятельный раздел механики сплошной среды. Изучение самых различных процессов, определяющих механизмы естественной конвекции, имеет значительную познавательную ценность. А с развитием наукоемких технологий существенно возрастает и прикладная значимость получаемых результатов. Полученные результаты и достижения в исследовании естественной конвекции применяются в геофизике, астрофизике, экологии, метеорологии, теплоэнергетике, металлургии, химии, кристаллофизике и других научных отраслях. Все возникающие в движущейся сплошной среде процессы являются нестационарными и нелинейными, что значительно затрудняет их изучение. Экспериментальное исследование таких задач связано со сложностью воспроизведения условий, в которых наблюдается явление, с проблемами соблюдения высокой точности измерений в исследуемой области, а также со значительными энергетическими и ресурсными затратами. Поэтому в настоящее время одним из актуальных способов исследования широкого диапазона конвективных течений сплошной среды представляется метод математического моделирования. Существенное влияние при этом имеет выбор соответствующей математической модели, адекватной исследуемому явлению. Это заранее позволяет определить параметры задачи, соответствующие преобладающим процессам. Не менее важным аспектом является методика проведения численных исследований математической модели. Разработка численных схем и построение оптимальных вычислительных алгоритмов, проведение расчетов сложных течений должны быть связаны с аналитическими свойствами модельных уравнений, определяющими асимптотики и предельные решения общих уравнений. Естественными конвективными течениями называются течения, единственной причиной которых является неодинаковость плотности, вызванная разностью температур. Описания поведения данных течений были подробно описаны Германом Шлихтингом, Милтоном Ван Дайком и Л.Г. Лойцянским. Рассматривается случай, когда естественное конвективное течение возникает около тонкой вертикально поставленной равномерно нагретой пластинки. Это течение обладает свойствами, характерными для пограничного слоя. Пограничный слой, область течения вязкой жидкости (газа), образующаяся у поверхности обтекаемого твёрдого тела или на границе раздела двух потоков жидкости с различными скоростями, температурами или химическим составом, и характеризуется резким изменением в поперечном направлении скорости, температуры, или же концентраций отдельных химических компонентов. На формирование течения в пограничном слое основное влияние оказывают вязкость, теплопроводность и диффузионная способность жидкости (газа). Внутри пограничного слоя происходит плавное изменение скорости от её значения во внешнем потоке до нуля на стенке вследствие прилипания вязкой жидкости к твёрдой поверхности. Аналогично внутри пограничного слоя плавно изменяются температура и концентрация. Развитие теплового пограничного слоя определяется числом Рейнольдса, а также числом Прандтля, которое характеризует соотношение между толщинами динамического и теплового пограничного слоя. В случае вертикально поставленной нагретой пластины давление в каждой горизонтальной плоскости равно весовому давлению и, следовательно, постоянно. Причиной движения является исключительно разность между весом и архимедовой подъёмной силой, обусловленная силой притяжения Земли. Тепло, возникшее вследствие трения, не учитывается.

Целью бакалаврской работы является решение задачи о естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при малых и больших числах Прандтля с помощью методов возмущений и метода Рунге - Кутты

Структура бакалаврской работы. В бакалаврской работе содержится введение, 5 разделов и заключение:

1. В введении рассматриваются основные понятия темы бакалаврской работы, ставится цель работы и описывается её содержание.
2. В первом разделе строится математическая модель задачи, из основных уравнений механики сплошной среды выводится система уравнений в автомодельных переменных.

3. Во втором разделе уравнения в автомодельных переменных решаются с помощью внешних и внутренних разложений методом возмущений для малых чисел Прандтля.
4. В третьем разделе представлено численное решение задачи с помощью алгоритма Рунге - Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка во внутренней области пограничного слоя для малых чисел Прандтля.
5. В четвёртом разделе уравнения в автомодельных переменных решаются с помощью внешних и внутренних разложений методом возмущений для больших чисел Прандтля.
6. В пятом разделе представлено численное решение задачи с помощью алгоритма Рунге - Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка во внутренней области пограничного слоя для больших чисел Прандтля.
7. В заключении указаны цели, которые были достигнуты по итогам бакалаврской работы.

Основное содержание бакалаврской работы Введём систему координат в соответствии с рисунком 1.

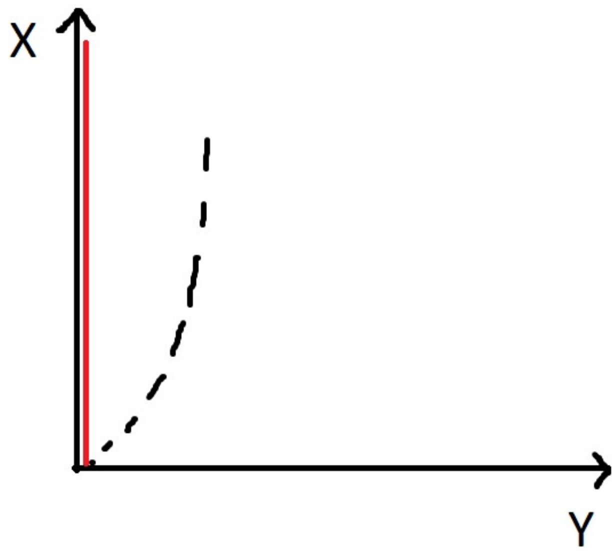

Рисунок 1 — Система координат Oxy

Запишем уравнения пограничного слоя учитывая, что

$$\frac{dP}{dx} = 0,$$

β – коэффициент теплового расширения, безразмерная температура

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty},$$

где T_∞ – температура на бесконечности, T_W – температура на стенке.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T_W - T_\infty)\theta, \\ u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ u(0) = v(0) = u(\infty) = \theta(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1, \end{cases}$$

где $a = \frac{\lambda}{c_P\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

В таком случае после введения функции тока и введя безразмерные переменные

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$x \sim L, \quad u \sim U,$$

$$y \; \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = \delta = \frac{L}{\sqrt{\frac{UL}{V}}}, \quad v \sim V.$$

$$\psi \sim \Psi = U\delta.$$

можно перейти к автомодельным переменным.

Устремляя y к бесконечности

$$\psi = 4\nu c x^{\frac{3}{4}}\varphi(\eta).$$

Тогда система в автомодельных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \\ \theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi'(\infty) = \theta(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1. \end{cases}$$

Получим решение для случаев, когда числа Прандтля малые. Задачи с малыми параметрами решаются с помощью методов возмущений, подробно описанных в трудах А. Х. Найфэ. В случае малых чисел Прандтля температурный пограничный слой намного больше динамического. Тогда во всей области течения можно выделить внутреннюю область, расположенную вблизи пластины и в которой силы вязкости сравнимы с силами инерции, и внешнюю область, расположенную вне некоторой окрестности поверхности пластины и в которой силы вязкости малы по сравнению с силами инерции и архимедовой подъемной силой.

Далее определим масштабы внутренней области и составим уравнения во внутренних и внешних переменных.

Система в автомодельных переменных будет в данном случае системой внутренних переменных, так как вязкие силы по порядку совпадают с инерциальными и поток тепла за счет конвекции меньше потока за счет теплопроводности.

$$\begin{cases} \varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \\ \theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \\ \theta(0) = 1. \end{cases}$$

Для получения системы во внешних переменных делается замена:

$$\begin{cases} \eta = Pr^{K_1}\bar{\eta}, \\ \varphi = Pr^{K_2}\bar{\varphi}, \\ \theta = \bar{\theta}, \end{cases}$$

где:

$\eta,\ \varphi,\ \theta$ – внутренние переменные,

$\bar\eta,\ \bar\varphi,\ \bar\theta$ – внешние переменные.

K_1 и K_2 находятся из условий, что поток тепла по порядку совпадает с конвективным, а вязкие члены малы по сравнению с инерциальными:

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{2}.$$

Получили систему уравнений во внешних переменных

$$\begin{cases} \bar\varphi''' Pr + 3\bar\varphi\bar\varphi'' - 2\bar\varphi'^2 + \bar\theta = 0, \\ \bar\theta'' + 3\bar\varphi\bar\theta' = 0, \\ \varphi'(\infty) = \theta(\infty) = 0. \end{cases}$$

Внутренние разложения будем искать в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + Pr^{\frac{1}{2}}\varphi_1 + Pr\varphi_2,$$

$$\theta = \theta_0 + Pr^{\frac{1}{2}}\theta_1 + Pr\theta_2.$$

Связь между внешними и внутренними переменными имеет вид:

$$\begin{cases} \bar\eta = Pr^{\frac{1}{2}}\eta, \\ \bar\varphi = Pr^{\frac{1}{2}}\varphi, \\ \bar\theta = \theta. \end{cases}$$

Приравнивая члены с числами Прандтля в одинаковых степенях получим уравнения для коэффициентов внутреннего разложения.

Для определения главных членов внутреннего разложения имеем:

$$\begin{cases} \varphi_0''' + 3\varphi_0\varphi_0'' - 2\varphi_0'^2 + \theta_0 = 0, \\ \theta_0'' = 0. \end{cases}$$

Для определения главных членов внешнего разложения имеем:

$$\begin{cases} 3\bar{\varphi}_0\bar{\varphi}_0'' - 2\bar{\varphi}_0'^2 + \bar{\theta}_0 = 0, \\ \bar{\theta}_0'' + 3\bar{\varphi}_0\bar{\theta}_0' = 0. \end{cases}$$

Получив условия сращивания окончательная система уравнений для главных членов внутреннего разложения имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_0''' + 3\varphi_0\varphi_0'' - 2\varphi_0'^2 + 1 = 0, \\ \theta_0 = 1, \\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \\ \varphi_0''(0) = C \end{cases}$$

Данная система решается по схеме Рунге - Кутты в соответствии с рисунком 2.

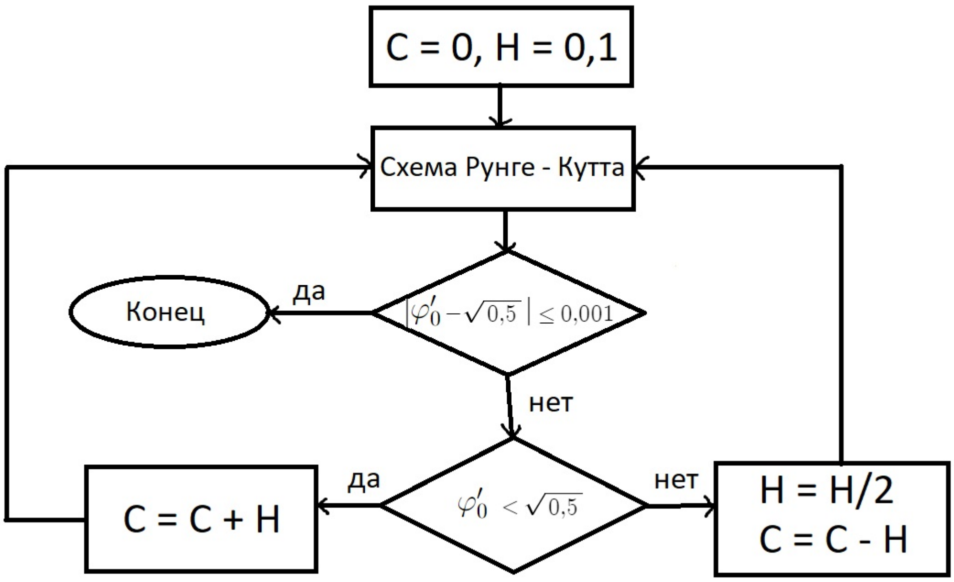

Рисунок 2 — Блок-схема программы расчёта главных коэффициентов внутреннего разложения

Код реализации численного метода и представлен в приложении к бакалаврской работе. Схема Рунге - Кутты написана на языке Python. Графики построены с помощью библиотеки matplotlib в соответствии с рисунком 3.

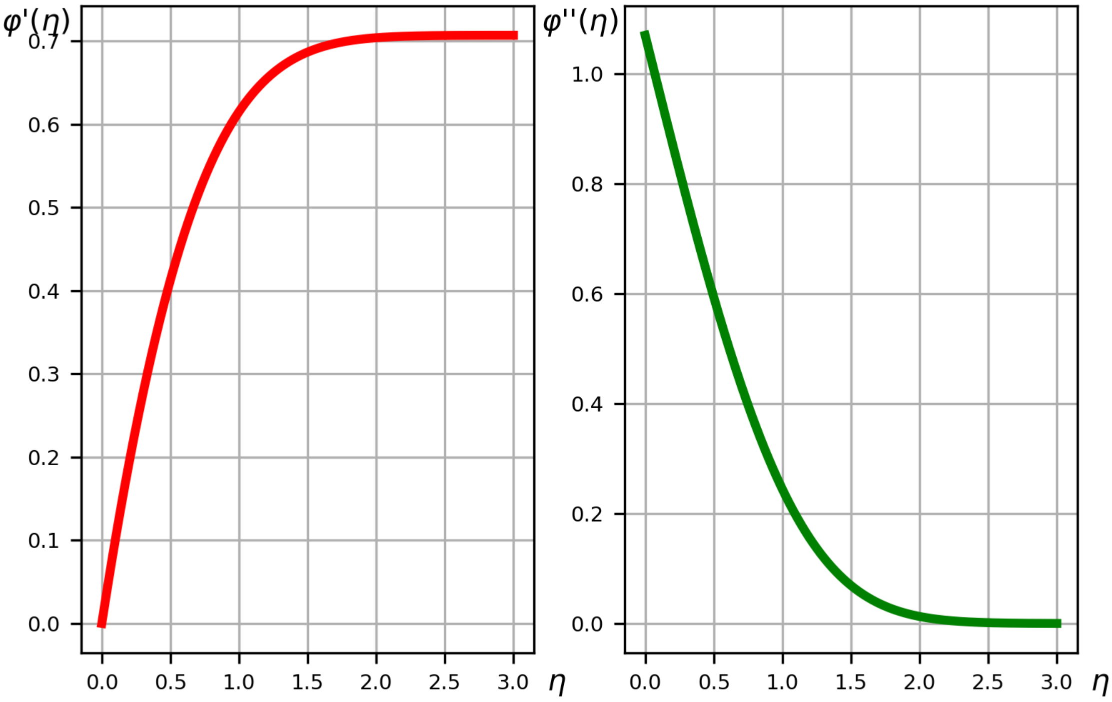

Рисунок 3 — Графики $\varphi'(\eta)$ и $\varphi''(\eta)$

По этим же этапам с некоторыми модификациями строится решение и для больших числах Прандтля, но разложения теперь по отрицательным степеням Pr. После всех преобразований получается следующее уравнение:

$$\frac{df}{d\bar{x}} = \frac{2\left(1-(A+2B\bar{x})f^4\right)}{3\left(1+A\bar{x}+B\bar{x}^2\right)f^3},$$

где $f(\bar{x})$ – толщина внутренней области. К этому уравнению применяется метод Рунге - Кутты и строятся графики толщины внутренней области.

Заключение. В бакалаврской работе были получены численные решения внутреннего разложения уравнения естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при малых и больших значениях чисел Прандтля, а именно

- получена система уравнений естественной конвекции в автомодельных переменных;

- с помощью методов возмущений получены системы уравнений для главных членов внешнего и внутреннего разложений при малых и больших числах Прандтля;
- с помощью численного метода Рунге - Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений получены численные решения для главных членов внутреннего разложения при больших и малых числах Прандтля.