

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Синтез робастных H_∞ -регуляторов для управления линейными

Системами при неопределённых внешних возмущениях

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная информатика и математика

механико-математического факультета

Власенко Дмитрия Ильича

Научный руководитель
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Синтез робастных H_∞ -регуляторов является одним из самых важных подходов к управлению линейными системами в условиях неопределенности внешних возмущений. Эта методика обеспечивает высокую степень устойчивости управляемой системы к различным типам возмущений.

Актуальность работы. Использование синтеза робастных H_∞ -регуляторов в управлении линейными системами позволяет обеспечить надежную и стабильную работу управляемой системы в условиях возмущений и изменений внешних условий. Это особенно важно в сложных технических системах, таких как автоматические управления производством, автомобильной промышленности, авиации и др.

Цель данной бакалаврской работы: исследование синтеза робастных H_∞ -регуляторов для управления линейными системами при неопределённых внешних возмущениях. Для достижения цели понадобится: рассмотреть упрощенную модель вертикального движения вертолета с учетом ветрового возмущения, построить субоптимальный регулятор, смоделировать алгоритм управления в условиях ветрового возмущения.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа содержит: введение, 2 раздела, заключение, список использованной литературы и одно приложение.

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи.

В первом разделе содержится теоретическая часть синтеза робастных регуляторов.

Во втором разделе рассмотрена задача робастного управления вертолетом.

Основное содержание работы.

Рассмотрим модель вертикального движения вертолёта в условиях ветрового возмущения с учётом динамики датчиков и привода.

Упрощенная модель вертикального движения вертолета с учётом ветрового возмущения может быть представлена в виде системы линеаризованных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_{yg} = \bar{Y}^{Vy} \cdot V_{yg} + \bar{Y}^{\varphi} \cdot \Delta\varphi - \bar{Y}^{Vy} \cdot W_y, \\ \Delta\dot{H} = V_{yg}, \end{cases} \quad (1)$$

где V_{yg} – вертикальная скорость, ΔH – приращение высоты полёта вертолётa, $\Delta\varphi$ – приращение общего шага несущего винта, W_y – вертикальная составляющая скорости ветра, \bar{Y}^{Vy} и \bar{Y}^{φ} – параметры модели вертолётa, зависящие от воздушной скорости полёта.

Динамику датчиков, измеряющих высоту полёта ΔH и вертикальную скорость V_{yg} , будем моделировать аperiodическими звеньями 1-го порядка

$$V_{yg}^{\phi} = \frac{1}{T_{Vy}s + 1} V_{yg}, \quad \Delta H^{\phi} = \frac{1}{T_H s + 1} \Delta H, \quad (2)$$

где V_{yg}^{ϕ} и ΔH^{ϕ} – значения вертикальной скорости и отклонения высоты полёта на выходе датчиков, T_{Vy} и T_H – постоянные времени датчиков.

Динамику привода также будем моделировать аperiodическим звеном 1-го порядка:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{T_{\varphi}s + 1} \Delta\varphi^{АП}, \quad (3)$$

где $\Delta\varphi^{АП}$ – величина отклонения общего шага несущего винта на выходе регулятора, T_{φ} – постоянная времени привода.

Система линейных дифференциальных уравнений, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_{yg} = \bar{Y}^{Vy} \cdot V_{yg} + \bar{Y}^{\varphi} \cdot \Delta\varphi - \bar{Y}^{Vy} \cdot W_y, \\ \Delta\dot{H} = V_{yg}, \\ \dot{V}_{yg}^{\phi} = \frac{1}{T_{Vy}} V_{yg} - \frac{1}{T_{Vy}} V_{yg}^{\phi}, \\ \Delta\dot{H}^{\phi} = \frac{1}{T_H} \Delta H - \frac{1}{T_H} \Delta H^{\phi}, \\ \Delta\dot{\varphi} = \frac{1}{T_{\varphi}} \Delta\varphi + \frac{1}{T_{\varphi}} \Delta\varphi^{АП}. \end{cases} \quad (4)$$

В пространстве состояний математическая модель вертикального движения вертолётa в условиях ветрового возмущения с учётом динамики датчиков и привода, в соответствии с (4), описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_0 \bar{x} + B_d \bar{d} + B_u \bar{u}, \\ \bar{y} = C_y \bar{x}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\bar{x} = (V_{yg}, \Delta H, V_{yg}^\phi, \Delta H^\phi, \Delta\varphi)^T$ – вектор внутреннего состояния, $\bar{d} = (W_y)^T$ – вектор ветрового возмущения, $\bar{u} = (\Delta\varphi^{АП})^T$ – вектор управления, $\bar{y} = (V_{yg}^\phi, \Delta H^\phi)^T$ – вектор измеряемого выхода.

Матрицы A_0, B_d, B_u, C_y модели (5) имеют вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \bar{Y}^{Vy} & 0 & 0 & 0 & \bar{Y}^\varphi \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/T_{Vy} & 0 & -1/T_{Vy} & 0 & 0 \\ 0 & 1/T_H & 0 & -1/T_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_\varphi \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -\bar{Y}^{Vy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/T_\phi \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим задачу управления вертикальным движением вертолета в условиях неопределенного ветрового возмущения W .

Для линеаризованной модели вертикального движения вертолета в условиях внешнего ветрового возмущения с учетом динамики датчиков и привода в пространстве состояний (5) вектор управляемых выходов \bar{z}_1 может быть записан в виде

$$\bar{z}_1 = I_y \bar{y}. \quad (7)$$

Рассмотрим вектор контролируемых выходов \bar{Z} , определенный следующим образом:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{u} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Объединяя (5)-(8) получаем систему уравнений, описывающую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B_d\bar{d} + B_u\bar{u}, \\ \bar{z}_1 = I_y\bar{y}, \\ \bar{z}_2 = I_u\bar{u}, \\ \bar{y} = C_y\bar{x} + I_yN_y, \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{d}_y \\ \bar{N}_y \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Учитывая (10), систему (9) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B_d\bar{d} + B_u\bar{u}, \\ \bar{z}_1 = I_y\bar{y}, \\ \bar{z}_2 = I_u\bar{u}, \\ \bar{y} = C_y\bar{x} + D_{\bar{d}}\bar{d}, \end{cases} \quad (11)$$

где $B_1 = [B_{1n}, 0^{n_y}]$, $D_{\bar{w}} = [0^{\bar{w}}, I_y]$. Здесь 0^{n_y} и $0^{\bar{w}}$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей, I_u – единичная матрица. \bar{u}

В общем, задачу управления вертолётном при наличии внешних возмущений можно сформулировать как построение для системы (9) (или (11)) линейного управления U , которое минимизирует влияние возмущения W на выход системы Z .

Если предполагать, что W является квадратично интегрируемой функцией, и выбирая в качестве критерия оптимальности H_∞ -норму передаточной функции $T_{\bar{w}z}$, получаем задачу построения H_∞ -оптимального регулятора: для системы управления математическая модель которой описывается системой (11), требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи

$$U(s) = K(s)Y(s), \quad (12)$$

минимизирующий вышеописанный критерий, т.е.

$$\|T_{\bar{w}z}\|_\infty \longrightarrow \min. \quad (13)$$

Упрощённая модель летательного аппарата описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B_d\bar{d} + B_u\bar{u}, \\ \bar{z}_1 = I_y\bar{y}, \\ \bar{z}_2 = I_u\bar{u}, \\ \bar{y} = C_y\bar{x} + D_d\bar{d}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\bar{x} = (V_{yg}, \Delta H, V_{yg}^\phi, \Delta\varphi)^T$ – вектор состояния, $\bar{d} = (W_y, N_y^T)^T$ – вектор возмущений, $Z = (Z_1^T, Z_2^T) = (V_{yg}^\phi, \Delta H^\phi, \Delta\varphi^{AM})^T$ – вектор контролируемых выходов, $U = (\Delta\varphi^{AM})$ – вектор управления.

Динамическая неопределенность удовлетворяет следующим соотношениям

$$\|\bar{d}(\cdot)\|_2 \leq C_d < \infty. \quad (15)$$

Задача построения H_∞ - оптимального регулятора. Для линейной модели (14) с учетом (8) в классе линейных управлений (12) найти управление U^* , которое минимизирует $\|T_{\bar{w}\bar{z}}\|_\infty$

$$\|T_{\bar{w}\bar{z}}\|_\infty \longrightarrow \min,$$

где $T_{\bar{w}\bar{z}}$ – матрица передаточных функций от вектора возмущений W к управляемому выходу Z в замкнутой системе. Задача построения H_∞ - субоптимального регулятора. Для линейной модели (14) с учетом (8) в классе линейных управлений (12) найти управление U^* , которое гарантирует оценку

$$\|T_{\bar{w}\bar{z}}\|_\infty < \gamma, \quad (16)$$

где $T_{\bar{w}\bar{z}}$ – матрица передаточных функций от вектора возмущений W к контролируемому выходу Z в замкнутой системе. Для решения сформулированной выше субоптимальной задачи воспользуемся методом, называемым Two Riccati Approach (2-Риккати подходом).

Построение H_∞ -субоптимальных регуляторов с помощью «2-Риккати подхода»

Пусть некий объект управления описывается линейной системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1\tilde{d} + B_2\tilde{u}, \\ \tilde{z} = C_1\tilde{x} + D_{11}\tilde{d} + D_{12}\tilde{u} = C_2\tilde{x} + D_{21}\tilde{d} + D_{22}\tilde{u}, \end{cases} \quad (17)$$

Здесь \tilde{x} – вектор состояния, \tilde{y} – вектор измерений, \tilde{z} – вектор контролируемых выходов, \tilde{u} – вектор управления, \tilde{d} – внешний вход системы. Пусть удовлетворяются следующие предположения:

1. (B_1, C_1) является стабилизируемой и детектируемой.
2. (B_2, C_2) является стабилизируемой и детектируемой.
3. $D_{12}^T [C_1 D_{12}] = [0 \ 1]$.
4. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{12} \end{bmatrix} D_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Теорема 1.5. Регулятор для системы (17), который гарантирует выполнение неравенства $\|T_{\tilde{w}\tilde{z}}\|_\infty < \gamma$ существует тогда и только тогда, когда

1. $\exists X_\infty \geq 0$ – решение обобщенного алгебраического уравнения Риккати управления (по-английски Generalized Control Algebraic Equation - GCARE)

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0;$$

2. $\exists Y_\infty \geq 0$ – решение обобщенного алгебраического уравнения Риккати фильтрации (по-английски Generalized Filtering Algebraic Equation - GFARE)

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1) Y_\infty + B_1 B_1^T = 0;$$

3. Спектральный радиус $\rho(X_\infty X_\infty) < \gamma$

$$\begin{cases} \dot{X}_C = A_C X_C + B_C \tilde{u}, \\ \tilde{u} = C_C X_C, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\begin{cases} A_C = A - B_2 B_C^T X_\infty - B_C + \gamma^{-2} B_1^T B_1 X_\infty, \\ B_C = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty C_2^T, \\ C_C = -B_2^T X_\infty. \end{cases} \quad (19)$$

Для использования «2-Риккати подхода» в задаче построения H_∞ -субоптимального управления вертолётom в условиях неопределенных входных возмущений надо проверить выполнение предполагаемых в этом алгоритме условий 1-4.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{x} &\equiv x, \tilde{y} \equiv y, \tilde{d} \equiv d, \tilde{z} \equiv z, \\ B_1 &= [B_{1n}, 0], \quad B_2 = B_{2n}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C_{z1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_U \end{bmatrix}, \\ C_2 &= C_y, \quad D_{21} = [0, I_y], \quad D_{22} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где 0 – нулевые матрицы соответствующих размерностей, то система (14) принимает вид (17). Для этой системы (с матрицами $B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$, представленными выше) предположения 1-4 выполняются, и можно воспользоваться описанным выше алгоритмом построения H_∞ -субоптимального регулятора.

Задача системы управления состоит в том, чтобы обеспечить заданную высоту полёта H при действии ветрового возмущения, модель которого описана в соответствии с разделом 2.5.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \bar{Y}^{Vy} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{1n} = \begin{bmatrix} -\bar{Y}^{Vy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2n} = \begin{bmatrix} -\bar{Y}^\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{z1} = [0 \ 1]. \end{aligned} \quad (21)$$

В результате «погружения» исходно задачи (7) в рамках задачи H_∞ оптимального синтеза (15) с учётом (18) получены матрицы

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \bar{Y}^{Vy} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -\bar{Y}^{Vy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \bar{Y}^\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

В обозначениях матриц регуляторов, приводимых ниже, первую цифру верхних индексов следует соотносить с величиной воздушной скорости V : 1 – для $V = 0$ км/ч, 2- для $V = 70$ км/ч, вторую цифру в верхних индексах следует соотносить со значением γ : 1 – γ_{opt} , 2 – $\gamma > 2$. Отметим, что в данном исследовании $\gamma_{opt} < 2$. Таким образом, имеем четыре случая

При воздушной скорости $V = 0$ км/ч матрицы регулятора имеют вид

$$A_c^{11} = \begin{bmatrix} -4.4105 & 0.0916 & -1.9177 & -0.9919 & 497.62 \\ 0.0269 & -1.9026 & 0.0385 & -0.1419 & -23.939 \\ -0.7042 & -0.0360 & -1.9328 & 0.1792 & -15.678 \\ -0.0321 & -0.0673 & -0.5417 & -1.0008 & 208.70 \\ 14.165 & 174.77 & -23.838 & -91.749 & -8532.6 \end{bmatrix},$$

$$B_c^{11} = \begin{bmatrix} 0.0013 & 0.0023 \\ 0.0433 & 0.0694 \\ 0.0150 & -0.0070 \\ -0.1876 & -0.1066 \\ 50.813 & 114.72 \end{bmatrix},$$

$$C_c^{11} = \begin{bmatrix} -0.1082 & -0.0148 & 0.3415 & 0.1886 & -101.42 \end{bmatrix}, D_c^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При воздушной скорости $V = 0$ км/ч матрицы регулятора, синтезированного в условиях ограничения $\gamma > 2$, имеют вид

$$A_c^{12} = \begin{bmatrix} -0.3493 & 0.0807 & -0.5472 & -0.9871 & 0.8935 \\ 1 & -2.1162e-15 & -1.2316 & -2.9385 & -2.4116e-16 \\ 2 & -7.2492e-16 & -2.5220 & -0.9706 & -4.0099e-17 \\ -1.8487e-15 & 2 & -0.9706 & -4.4532 & -2.0829e-16 \\ -7.6912 & -5.8191 & -0.5192 & -0.2596 & -6.2149 \end{bmatrix},$$

$$B_c^{12} = \begin{bmatrix} 0.4176 & 0.7440 \\ 0.9237 & 2.2039 \\ 0.3915 & 0.7279 \\ 0.7279 & 1.8399 \\ -2.7669e-17 & -7.1631e-17 \end{bmatrix},$$

$$C_c^{12} = \begin{bmatrix} -1.5382 & -1.1638 & -0.1038 & -0.0519 & -0.2429 \end{bmatrix}, D_c^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При воздушной скорости $V = 70$ км/ч матрицы регулятора имеют вид

$$A_c^{21} = \begin{bmatrix} -4.6878 & 0.0426 & -1.5220 & 0.8926 & -601.48 \\ 0.0333 & -1.8974 & -0.1281 & 0.1361 & -41.952 \\ -0.5046 & -0.0162 & -1.5332 & -0.1117 & 141.64 \\ 0.0739 & -0.2468 & 0.6677 & -1.1568 & 197.29 \\ -11.588 & 227.30 & -4.7907 & -125.09 & -13826 \end{bmatrix},$$

$$B_c^{21} = \begin{bmatrix} -0.0034 & -0.0006 \\ -0.0826 & -0.0906 \\ 0.1514 & 0.0727 \\ 0.3157 & 0.2486 \\ -93.760 & -171.05 \end{bmatrix},$$

$$C_c^{21} = \begin{bmatrix} -0.0581 & -0.0072 & 0.2767 & -0.1706 & 119.74 \end{bmatrix}, D_c^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При воздушной скорости $V = 70$ км/ч матрицы регулятора, синтезированного в условиях ограничения $\gamma > 2$, имеют вид

$$A_c^{22} = \begin{bmatrix} -0.4985 & 0.2204 & -4.1091 & -7.1756 & 0.9249 \\ 1 & -4.7730e-15 & -8.3903 & -15.524 & 6.8129e-16 \\ 2 & -2.2820e-15 & -5.7210 & -6.5298 & 2.2880e-16 \\ -1.0828e-15 & 2 & -6.5298 & -14.259 & 4.7662e-16 \\ -6.9359 & -6.3302 & -0.5326 & -0.2663 & -6.1298 \end{bmatrix},$$

$$B_c^{22} = \begin{bmatrix} 3.1006 & 5.3912 \\ 6.2929 & 11.644 \\ 2.7908 & 4.8975 \\ 4.8975 & 9.1953 \\ 1.2362e - 15 & 2.3363e - 15 \end{bmatrix},$$

$$C_c^{22} = \begin{bmatrix} -1.3871 & -1.2660 & -0.1065 & -0.0532 & -0.2259 \end{bmatrix}, D_c^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значения γ для четырех случаев приведен в соответствии с таблицей 1

Таблица 1 — Значения γ

	γ_{opt}	$\gamma > 2$
$V = 0$ км/ч	0.55683	1.97227
$V = 70$ км/ч	0.509336	1.99932

На графиках кривые, отвечающие разомкнутой системе обозначены черным цветом, кривые, отвечающие замкнутой H_∞ -субоптимальным регулятором системе с $\gamma = \gamma_{opt}$ — синим цветом, а кривые, отвечающие замкнутой H_∞ -субоптимальным регулятором системе при ограничении $\gamma > 2$ — розовым цветом.

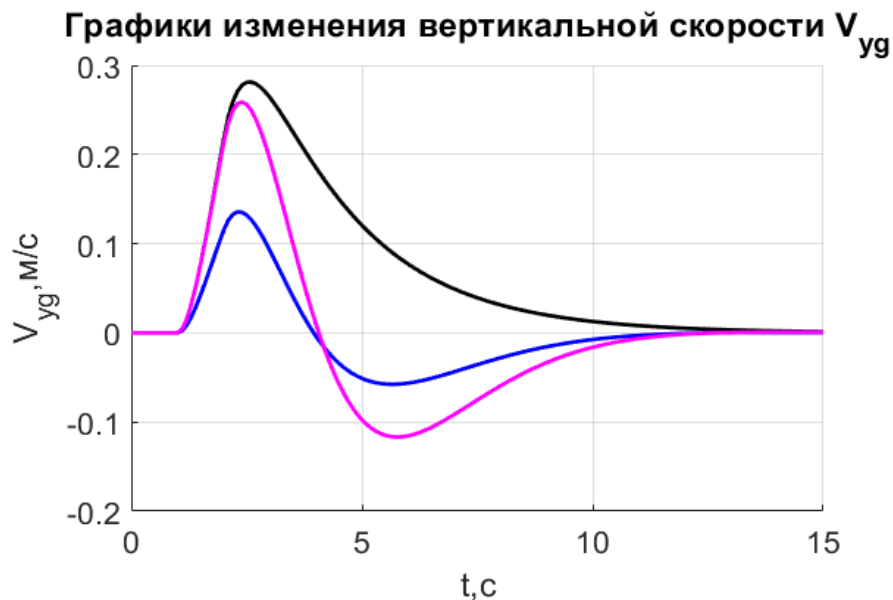


Рисунок 1 — График отклонения вертикальной скорости полета V_{yg} при $V = 0$ км/ч

В соответствии с рисунком 2.4 можно сделать вывод что, при $V = 0$ км/ч диапазон изменения вертикальной скорости при использовании в кон-

туре обратной связи H_∞ -регулятора с $\gamma = \gamma_{opt}$ на 94.4% меньше, чем при использовании H_∞ -регулятора, синтезированного в условиях ограничения.

В соответствии с рисунком 2.5 можно сделать вывод что, при $V = 70$ км/ч диапазон изменения вертикальной скорости при использовании в контуре обратной связи H_∞ -регулятора с $\gamma = \gamma_{opt}$ на 100.1% меньше, чем при использовании H_∞ -регулятора, синтезированного в условиях ограничения.

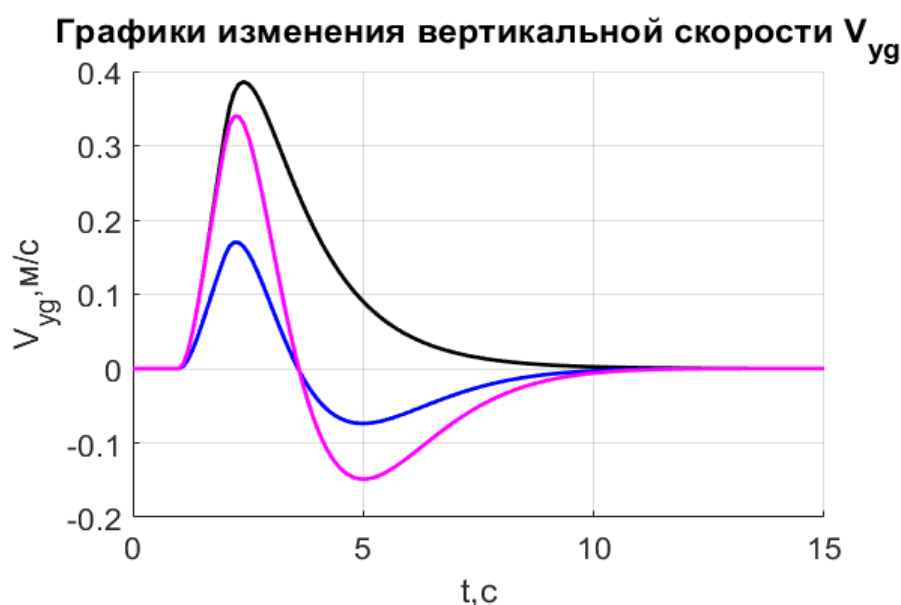


Рисунок 2 — График отклонения вертикальной скорости полета V_{yg} при $V = 70$ км/ч

Заключение Привычный в теории управления квадратичный критерий качества чувствителен к наличию неучтенной помехи. В отличии от квадратичной, H -норма служит показателем реакции системы на воздействия при наличии неопределенностей в описании. H -теория работает и с параметрическими, и с внешними возмущениями. При этом делаются предположения самого общего характера, например, ограниченность по мощности.

Рассмотрены алгоритмы -оптимизации, которые, по сути, являются минимаксными и позволяют находить наилучший регулятор при наличии возможно наихудшего возмущения.

С помощью освоенных алгоритмов на упрощенной модели вертикального движения вертолета произведен синтез робастного регулятора для тестовой задачи стабилизации высоты вертолета на режиме висения. Анализ результатов показывает работоспособность алгоритмов синтеза.