

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Авто решения теории пограничного слоя

с учетом электропроводности жидкости

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Бровкина

Научный руководитель  
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2023

**Введение.** Теория пограничного слоя занимает одно из важнейших мест в современной механике. Такая физическая модель позволяет разделить поток на две области: тонкий вязкий пограничный слой и область невязкого течения. В настоящее время исследования явлений, связанных с пограничным слоем, сохраняют свою актуальность. В частности, такие задачи постоянно возникают в авиации при изучении обтекания крыла. Что же касается конвекции, то и в этой области появляется множество научных работ. Среди посвященных этой теме публикации, вышедших в начале XX века, можно назвать статьи Смирнова и Мадеры, где выполняется математическое моделирование конвекции у вертикальной пластины. Многие атмосферные и космические явления основаны на конвекции, что придает особую важность её изучению.

**Целью** данной бакалаврской работы является исследование задачи о автомодельных течениях естественной конвекции в сильном магнитном поле, ее численном решении.

Для достижения поставленной цели нужно было решить следующие задачи:

1. Поставить задачу о пластине.
2. Приближенно решить задачу методом асимптотических разложений.
3. Численно решить задачу.
4. Получить формулы для теплоотдачи и напряжения трения на пластине.

**Структура бакалаврской работы.** Бакалаврская работа содержит введение, 4 раздела, заключение, список использованной литературы и одно приложение. Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи.

В первом разделе содержится постановка задачи и основные уравнения движения.

Во втором разделе представлено решение в виде разложений.

В третьем разделе численно получены коэффициенты разложения.

В четвертом разделе получены формулы для теплоотдачи и напряжения трения на пластине.

**Основное содержание работы.** Пусть пространство заполнено вязкой электропроводной несжимаемой жидкостью. Температура жидкости посто-

янна и равна  $T_\infty$ . В эту жидкость помещена вертикально поставленная пластина, имеющая переменную температуру  $T_\omega$ , причем температура пластины выше температуры окружающей среды. Тогда под действием разности температур возникает естественная конвекция жидкости. Кроме того, на движение жидкости будет влиять наложенное внешнее магнитное поле.

Для составления уравнений движения введём систему координат, направив ось  $X$  по вертикали вверх, а ось  $y$  перпендикулярно к пластине. Вдоль оси  $z$  пластина будет считаться неограниченной, поэтому от координаты  $z$  решение зависеть не будет. Схема течения изображена в соответствии с рисунком 1.1. Разность температур приводит к появлению разности плотности,

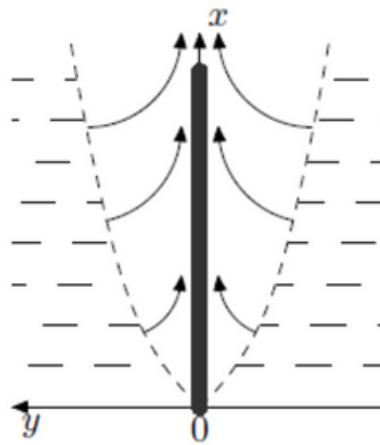


Рисунок 1 — Расположение пластины с прилегающим к ней слоем конвекции

поэтому к активным силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу:

$$g(T - T_\infty)\beta\nu, \quad \text{где } \nu = \frac{T - T_\infty}{T_\omega - T_\infty}. \quad (1)$$

Тогда уравнения движения электропроводной несжимаемой жидкости в пограничном слое во внешнем магнитном поле, при условии, что магнитное число Рейнольдса мало, примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(T_\omega - T_\infty)\beta\nu - \frac{\delta^2 B^2 u}{\rho}\right), \\ \rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \delta B^2 u^2. \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение представляет собой уравнение неразрывности. Второе уравнение – это уравнение количества движения, где  $\rho g \beta (T - T_\infty)$  архимедова подъёмная сила, а  $\frac{\sigma B^2 u}{\rho}$  сила Лоренца. Третье уравнение представляет собой уравнение энергии.

Течения, единственной причиной которых является неодинаковость плотности, вызванная разностью температур, называются естественными конвективными течениями. В случае вертикально поставленной нагретой пластины давление в каждой горизонтальной плоскости равно весовому давлению и, следовательно, постоянно.

Причиной движения является разность между весом и архимедовой подъёмной силой, обусловленная силой притяжения Земли.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} y = 0 : & u = v = 0, \quad T = T_\omega(x); \\ y = \infty : & u = 0, \quad T = T_\infty. \end{cases} \quad (3)$$

Первое условие означает прилипание жидкости к пластине и условие того, что температура части жидкости, прилегающей к пластине, равна температуре пластины.

Второе условие означает, что на бесконечности движение жидкости затухает, вследствие того, что температура частиц жидкости при удалении от пластины стремится к  $T_\infty$  и архимедова подъёмная сила исчезает. Систему уравнений запишем в безразмерных переменных, полагая

$$u = U\bar{u}, \quad v = V\bar{v}, \quad x = L\bar{x}, \quad y = \delta\bar{y};$$

$$T = T_\infty + \bar{t}(\Delta T)_0, \quad B = B_0\bar{B}. \quad (4)$$

Из всех введенных величин вместе с постановкой задачи даются  $\Delta T_0$  и  $L, B_0$ , остальные величины должны быть определены из сравнения порядка членов.

Поскольку в дальнейшем будет рассматриваться решение задачи только в безразмерных переменных, то чёрточки над безразмерными величинами

будут опущены. Там, где встретятся размерные величины, они будут специально оговорены.

Исходя из уравнения неразрывности, можно ввести функцию тока  $\psi$ , тогда уравнение неразрывности выподняется тождественно.

Окончательный вид уравнений движения и энергии в автомоделных переменных:

$$\begin{cases} f - \varphi' = -\frac{n+3}{4}\varepsilon^2 \left\{ \varphi''' + \frac{1}{Pr} \left[ \varphi\varphi'' - \frac{2(n+1)}{n+3} (\varphi')^2 \right] \right\}, \\ \frac{4n}{n+3}\varphi'f - \varphi f' = f''. \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия в автомоделных переменных имеют вид :

$$\begin{cases} \xi = 0 : & \varphi' = 0, \quad \varphi = 0, \quad f = 1; \\ \xi = \infty : & \varphi' = 0, \quad f = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (5) ищется при условии, что  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда решение можно искать методом разложения по малому параметру. Поэтому функции  $\varphi$  и  $f$  ищутся в виде разложения по  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \dots, \\ f &= f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения коэффициентов нулевого приближения имеем систему:

$$\begin{cases} f_0 - \varphi'_0 = 0, \\ \frac{4n}{n+3}\varphi'_0 f_0 - \varphi_0 f'_0 = f''_0. \end{cases} \quad (8)$$

Для определения коэффициентов первого приближения имеем систему:

$$\begin{cases} f_1 - \varphi'_1 = 0, \\ \frac{4n}{n+3}(\varphi'_0 f_1 + \varphi'_1 f_0) - \varphi_0 f'_1 - \varphi_1 f'_0 = f''_1. \end{cases} \quad (9)$$

Для определения коэффициентов второго приближения имеем систему:

$$\begin{cases} f_2 - \varphi'_2 = -\frac{n+3}{4} \left\{ \varphi_0''' + \frac{1}{Pr} \left[ \varphi_0 \varphi_0'' - \frac{2(n+1)}{n+3} (\varphi_0')^2 \right] \right\}, \\ \frac{4n}{n+3} (\varphi_0' f_2 + \varphi_1' f_1 + \varphi_2' f_0) - \varphi_0 f_2' - \varphi_1 f_1' - \varphi_2 f_0' = f_2''. \end{cases} \quad (10)$$

Разложение функций (7) является внешним разложением и для этого разложения граничные условия при  $\xi = \infty$  совпадают с условием (6), а условие при  $\xi = 0$  должно быть заменено условием срачивания.

Таким образом, при  $\xi = \infty$  коэффициенты разложения  $\varphi_i$  и  $f_i$  удовлетворяют условию:

$$\xi = \infty : \varphi_i' = 0, f_i = 0. \quad (11)$$

Система уравнений пограничного слоя во внутренних переменных имеет вид:

$$\begin{cases} f - \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{n+3}{4} \left\{ \frac{d^3\Phi}{dz^3} + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{Pr} \left[ \frac{d^2\Phi}{dz^2} \cdot \Phi - \frac{2(n+1)}{n+3} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right] \right\}, \\ \frac{d^2 f}{dz^2} = \varepsilon^2 \left( \frac{4n}{n+3} f \frac{d\Phi}{dz} - \frac{df}{dz} \Phi \right). \end{cases} \quad (12)$$

В уравнения системы (12) входит параметр  $\varepsilon$ . Поэтому и решение будет зависеть от него, причем будет считаться, что  $\varepsilon \ll 1$ . Решение системы (12) ищется в виде функций  $\Phi$  и по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \dots, \\ f &= F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Phi_i$  и  $F_i$  коэффициенты разложения, зависящие от  $z$  и не зависящие от параметра  $\varepsilon$ . Подставляя функции  $\Phi$  и  $f$  в систему (12) и собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим системы уравнений для определения коэффициентов внутреннего разложения. Для определения коэффициентов нулевого приближения имеется система:

$$\begin{cases} F_0 - \frac{d\Phi_0}{dz} = -\frac{n+3}{4} \frac{d^3\Phi_0}{dz^3}, \\ \frac{d^2 F_0}{dz^2} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Для определения коэффициентов первого приближения имеется система:

$$\begin{cases} F_1 - \frac{d\Phi_1}{dz} = -\frac{n+3}{4} \frac{d^3\Phi_1}{dz^3}, \\ \frac{d^2F_1}{dz^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для определения коэффициентов второго приближения имеется система уравнений:

$$\begin{cases} F_2 - \frac{d\Phi_2}{dz} = -\frac{n+3}{4} \frac{d^3\Phi_2}{dz^3} + \frac{1}{Pr} \left[ \frac{d^2\Phi_0}{dz^2} \cdot \Phi_0 - \frac{2(n+1)}{n+3} \left( \frac{d\Phi_0}{dz} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2F_2}{dz^2} = \frac{4n}{n+3} F_0 \frac{d\Phi_0}{dz} - \frac{dF_0}{dz} \Phi_0. \end{cases} \quad (16)$$

Для того чтобы определить теплоотдачу с точностью до  $\varepsilon^2$ , необходимо построить решение для следующего коэффициента разложения  $F_3$ . Уравнение для нахождения  $F_3$  имеет вид:

$$\frac{d^2F_3}{dz^2} = \frac{4n}{n+3} \left( F_1 \frac{d\Phi_0}{dz} + F_0 \frac{d\Phi_1}{dz} \right) - \frac{dF_1}{dz} \Phi_0 - \frac{dF_0}{dz} \Phi_1. \quad (17)$$

Найдем условия срачивания коэффициентов внутреннего и внешнего разложения. Для этого внешнее решение рассмотрим при малых значениях  $\xi$ . Внешнее разложение для функции  $f$  имеет вид:

$$f(\xi) = f_0(\xi) + \varepsilon f_1(\xi) + \varepsilon^2 f_2(\xi) + \varepsilon^3 f_3(\xi) + \dots \quad (18)$$

В этом выражении заменим внешнюю переменную  $\xi$  внутренней переменной  $z$ , и тогда получим представление внешнего разложения во внутренних переменных, которое будет действовать в области перекрытия внутренней и внешней областей.

В этой же области перекрытия  $f(\xi)$  можно представить через внутреннее разложение.

Сравнивая два представления функции  $f$  в области перекрытия и приравнявая члены с одинаковыми степенями при  $\varepsilon$ , получим условия срачивания

для коэффициентов внешнего и внутреннего разложения функции  $f$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \infty} F_0 &= f_0(0), \\
\lim_{z \rightarrow \infty} F_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ f_1(0) + \frac{df_0}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cdot z \right], \\
\lim_{z \rightarrow \infty} F_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ f_2(0) + \frac{df_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \cdot z^2 \right], \\
\lim_{z \rightarrow \infty} F_3 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ f_3(0) + \frac{df_2}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 f_0}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} \cdot z^3 \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Для функции  $\varphi$  условия срачивания строятся аналогично и имеют вид:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_0 &= 0, \\
\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \varphi_1(0) + \frac{d\varphi_0}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cdot z \right], \\
\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \varphi_2(0) + \frac{d\varphi_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \cdot z^2 \right], \\
\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \varphi_3(0) + \frac{d\varphi_2}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_1}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 \varphi_0}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} \cdot z^3 \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Условия срачивания (19) и (20) являются граничными условиями при  $z \rightarrow \infty$  для внутреннего разложения и граничными условиями при  $\xi \rightarrow 0$  для внешнего разложения. Далее, находятся коэффициенты  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, F_0, F_1, F_2, F_3$ .

После этого системы уравнений преобразуются для определения коэффициентов приближений внешней задачи таким образом, чтобы можно было применить численный метод.

Для системы нулевого приближения:

$$\begin{cases} f_0 = \frac{d\varphi_0}{d\xi}, \\ \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} + \varphi_0 \frac{df_0}{d\xi} - \frac{4n}{n+3} \frac{d\varphi_0}{d\xi} f_0 = 0. \end{cases} \tag{21}$$



введём замену  $\tilde{f}_0 = \frac{df_0}{d\xi}$  и перепишем:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_0}{d\xi} = f_0 = \mathfrak{f}_0 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0 \right), \\ \frac{df_0}{d\xi} = \tilde{f}_0 = \mathfrak{g}_0 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0 \right), \\ \frac{d\tilde{f}_0}{d\xi} = \frac{4n}{n+3} f_0^2 - \varphi_0 \tilde{f}_0 = \mathfrak{h}_0 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0 \right). \end{cases} \quad (22)$$

Должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \xi = 0 : & \varphi_0 = 0, \quad f_0 = 1, \\ \xi : \infty & \quad \quad \quad f_0 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Система для первого приближения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\xi} = f_1 = \mathfrak{f}_1 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1 \right), \\ \frac{df_1}{d\xi} = \tilde{f}_1 = \mathfrak{g}_1 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1 \right), \\ \frac{d\tilde{f}_1}{d\xi} = \frac{8n}{n+3} f_1 f_0 - \varphi_0 \tilde{f}_1 - \varphi_1 \tilde{f}_0 = \mathfrak{h}_1 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1 \right). \end{cases} \quad (24)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \xi = 0 : & \varphi_1 = -\frac{\sqrt{n+3}}{2}, \quad f_1 = 0, \\ \xi \rightarrow \infty : & \quad \quad \quad f_1 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Система для второго приближения:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_2}{d\xi} = f_2 + n f_0^2 - \frac{n+3}{4} \varphi_0 \tilde{f}_0 \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) - \frac{n+1}{2\text{Pr}} f_0^2 = \\ = \mathfrak{f}_2 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1, \varphi_2, f_2, \tilde{f}_2 \right), \\ \frac{df_2}{d\xi} = \tilde{f}_2 = \mathfrak{g}_2 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1, \varphi_2, f_2, \tilde{f}_2 \right), \\ \frac{d\tilde{f}_2}{d\xi} = \frac{4n}{n+3} \left( 2f_0 f_2 + f_1^2 + n f_0^3 - \frac{n+1}{2\text{Pr}} \right) + n \varphi_0 f_0 \tilde{f}_0 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) - \\ - \varphi_2 \tilde{f}_0 - \varphi_1 \tilde{f}_1 - \varphi_0 \tilde{f}_2 = \mathfrak{h}_2 \left( \xi, \varphi_0, f_0, \tilde{f}_0, \varphi_1, f_1, \tilde{f}_1, \varphi_2, f_2, \tilde{f}_2 \right). \end{cases} \quad (26)$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} \xi = 0 : & \varphi_2 = 0, \quad f_2 = n, \\ \xi \rightarrow \infty : & f_2 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

После чего во внешней области первые три члена разложения находим с применением численного метода, представляющего собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге—Кутты второго порядка.

**Результаты расчетов.** Графики изменения коэффициентов нулевого, первого и второго приближений при значениях параметров  $n = 0.5$  и  $n = 1$  для числа Прандтля  $Pr = 1$  даны в соответствии с рисунком 2, в соответствии с рисунком 3, в соответствии с рисунком 4, в соответствии с рисунком 5.

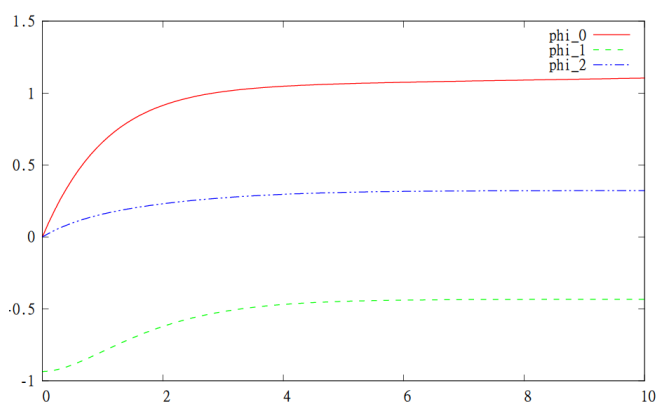


Рисунок 2 — График первых трёх приближений функции  $\varphi$  при значениях параметров  $n = 0.5$ ,  $Pr = 1$

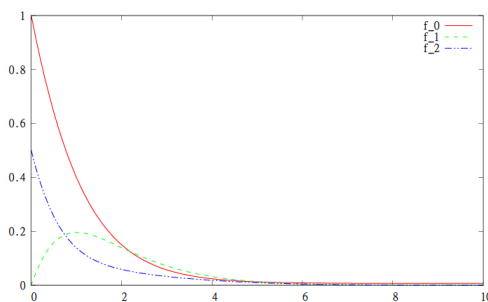


Рисунок 3 — График первых трёх приближений функции  $f$  при значениях параметров  $n = 0.5$ ,  $Pr = 1$

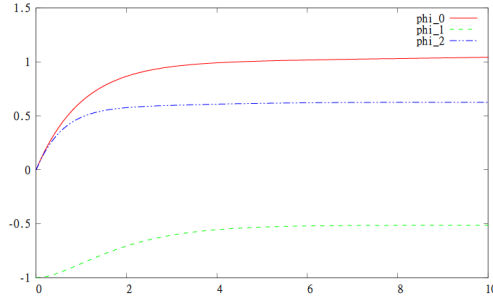


Рисунок 4 — График первых трёх приближений функции  $\varphi$  при значениях параметров  $n = 1$ ,  $Pr = 1$

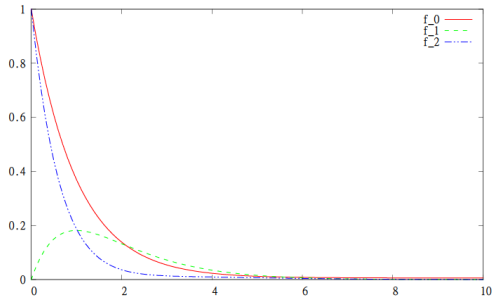


Рисунок 5 — График первых трёх приближений функции  $f$  при значениях параметров  $n = 1$ ,  $Pr = 1$

**Определение теплоотдачи и напряжения трения на пластине.** Поток тепла через единицу площади на пластине задаётся формулой

$$\begin{aligned}
 q = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\lambda c \beta g(n+3))^{\frac{1}{2}} T_1^{\frac{3}{2}}}{2B_1 \sigma^{\frac{1}{2}} l^{\frac{5m+1}{4}}} \cdot x^{\frac{5m-1}{4}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{df_0}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \varepsilon \left( \frac{df_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{2n}{\sqrt{n+3}} \right) + \right. \\
 & \left. + \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{5n+3}{4} + \frac{3}{8}(3n+1)\sqrt{n+3} \right) \frac{df_0}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \right] \right\}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Здесь величина  $x$  является размерной. При помощи этой формулы можно изучать зависимость потока тепла от характерной разности температур пластины и окружающей жидкости, напряжённости магнитного поля и других параметров.

С учётом соотношений получим формулу

$$\tau = 0,5\mu \frac{(c\beta g T_1 \sigma(n+3))^{\frac{1}{2}} B_0 x^{\frac{3n+1}{4}}}{\lambda^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^2 l^{\frac{3n-1}{4}}} \cdot \left[ \frac{2}{\sqrt{n+3}} + \varepsilon \frac{df_0}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \varepsilon^2 \left( \frac{n(n+5)}{2\sqrt{n+3}} + \frac{df_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{25n+31}{12\sqrt{n+3}} \right) \right]. \quad (29)$$

Формула (29) показывает, что при увеличении разности температур окружающей жидкости и пластины, при увеличении электропроводности жидкости или при увеличении напряжённости магнитного поля напряжение трения на пластине увеличивается, а при увеличении числа Прандтля  $P_r$  – уменьшается.

**Заключение.** В настоящей работе была поставлена, рассмотрена и решена задача о автомодельных течениях естественной конвекции в сильном магнитном поле. В начале была выписана система уравнений в размерных переменных. Далее эта система была преобразована к безразмерному виду. Для внутренней области аналитическим путем были получены первые три разложения, а так же выведены граничные условия для внешнего разложения. В конце были представлены графики, значения которых получены численным методом, а также формулы, по которым можно вычислить теплоотдачу и напряжение трения на пластине.