

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

**ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ
КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Шмагиной Галины Владимировны

Научный руководитель:

профессор, д. ф.-м. н. _____ Андрейченко Д.К.

подпись, дата

Зав. кафедрой:

профессор, д. ф.-м. н. _____ Андрейченко Д.К.

подпись, дата

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Ряд современных технических систем содержат объекты управления с сосредоточенными по пространству параметрами (с конечным числом степеней свободы) и динамически связанные с ними через границы раздела объекты управления с распределенными по пространству параметрами (с бесконечным числом степеней свободы). Математические модели подобных технических систем представляются в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях и названы в работах [1, 2] комбинированными динамическими системами (КДС). Примером КДС служит математическая модель цилиндрического гидродинамического подвеса [2], широко применяющегося в гироскопах гидродинамического типа. После исследования областей устойчивости КДС [1-3] на основе линеаризованной модели и выбора параметров системы в пределах области устойчивости требуется изучить переходные процессы в исходной нелинейной системе, что можно сделать лишь численно. Наличие в математической модели уравнений в частных производных делает весьма трудоемкими задачи численного моделирования динамики нелинейных КДС, и актуальна оптимизация алгоритмов компьютерного моделирования и дальнейшего их ускорения на основе распараллеливания вычислений [4-6]. При численном моделировании переходных процессов в КДС целесообразна замена с требуемой степенью точности входящих в математическую модель уравнений в частных производных обыкновенными дифференциальными уравнениями. При этом дискретизация уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галеркина [7]. Полученная в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности интегрируется численно [8]. Одним из наиболее эффективных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является явно- неявный многошаговый метод Адамса переменного шага и порядка [8, 9]. Вместе с тем, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученные в результате дискретизации

начально-краевых задач математической физики, и, в частности, уравнений динамики КДС, могут оказаться «жесткими» в смысле [10], что делает не столь эффективным применение к ним явных методов Рунге-Кутты, Адамса и т.д. К ним применяются т.н. «жестко устойчивые» методы, родственные неявному ФДН-методу переменного шага и порядка [10]. Неявные «жестко устойчивые» методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений требуют вычисления матрицы Якоби правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений, и именно эта операция определяет в наибольшей степени трудоемкость компьютерного моделирования. Обычно это выполняется на основе разностных аппроксимаций, однако для систем достаточно большой размерности такой подход приводит к неоправданному возрастанию трудоемкости алгоритмов компьютерного моделирования. Вместе с тем, отдельные столбцы матрицы Якоби могут быть вычислены на основе применения проекционного метода Галеркина к линеаризованным уравнениям возмущенного движения КДС, а применение проекционного метода к линейным уравнениям характеризуется меньшей трудоемкостью, чем его применение к нелинейным уравнениям. При этом отдельные столбцы матрицы Якоби могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно.

Цель бакалаврской работы – исследование возможности оптимизации алгоритмов моделирования переходных процессов в нелинейных КДС на основе «жестко устойчивых» методов численного интегрирования и сокращения трудоемкости вычисления матрицы Якоби ФДН-метода.

Для достижения поставленной цели требуется решение **следующих задач**:

1. Обзор проекционного метода Галеркина, а также метода Адамса и ФДН-метода численного интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Разработка оптимизированного алгоритма численного моделирования переходных процессов в нелинейных КДС на основе проекционного метода Галеркина и «жестко устойчивого» ФДН-метода.
3. Разработка параллельной версии оптимизированного алгоритма.

4. Численное моделирование выходных функций цилиндрического гидродинамического подвеса.
5. Исследование эффективности оптимизированного алгоритма и распараллеливания вычислений на примере задачи моделирования выходных функций цилиндрического гидродинамического подвеса

Методологические основы исследование алгоритмов моделирования динамики комбинированных динамических система представлены в работах Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Комарова М.С., Эндрюс, Г.Р., Гергель, В.П., Флетчер К, Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова.

Практическая значимость бакалаврской работы. Рассматриваемый в работе цилиндрический гидродинамический подвес является широко распространенным конструктивным элементом гидродинамических гироскопов и акселерометров, в частности в нуль-индикаторах скорости бокового сноса баллистических ракет. Гироскопы широко используется в системах инерциальной навигации в датчиках угловых смещений и скоростей подвижных объектов управления.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы – 63 страницы, из них 42 страниц – основное содержание, включая 12 рисунков и 6 таблиц, цифровой носитель в качестве приложения, список использованных источников информации – 25 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Математические модели и методы моделирования КДС» посвящен рассмотрению структурной схемы и вида математической модели.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h})$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \Big|_S = 0$$

$$\mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}) dS$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$$

Математические модели КДС содержат как обыкновенные дифференциальные уравнения, соответствующие объектам с сосредоточенными по пространству параметрами, так и связанные с ними посредством граничных условий и условий связи уравнения в частных производных, соответствующие объектам с распределенными по пространству параметрами.

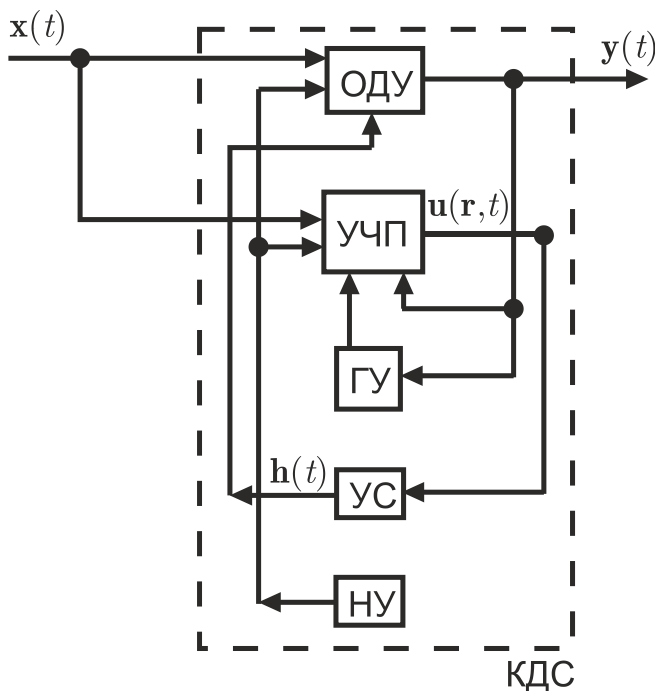


Рисунок 1 - Структурная схема КДС

Целесообразно выполнять дискретизацию уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным с целью замены с требуемой степенью точности модельных уравнений КДС системами обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности. Это выполняется на основе проекционного метода Галёркина. Далее приводим модель к решению методом Адамса для задачи Коши.

Исследуем устойчивость численного интегрирования и «жесткие» системы. Области устойчивости и явного, и неявного метода Адамса [10] характеризуется конечной протяженностью в левой комплексной полуплоскости. Т.е. методы Адамса не являются $A(\alpha)$ -устойчивыми, и тем более не являются A -устойчивыми. Такие методы неприменимы к жестким задачам из-за ограничения на величину шага интегрирования $|h| \sim 1 / \max |\lambda_j|$, $j = \overline{1, N}$.

Проекционный метод Галёркина предполагает, что искомое решение уравнений в частных производных представляется отрезком ряда Фурье. Правые части уравнений в частных производных содержат линейные

комбинации рядов Фурье, операции их перемножения, дифференцирования и т.д., и сами представляются некоторыми рядами Фурье. Их вычисление трудоемко и распараллеливается. Скалярные произведения проекционного метода могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно. Далее, «быстрый алгоритм» [13] вычисления матрицы Якоби предполагает параллельное вычисление отдельных ее столбцов.

Второй раздел «Математическая модель цилиндрического гидродинамического подвеса» посвящен рассмотрению и численному моделированию цилиндрического гидродинамического подвеса. Внешний цилиндр движется поступательно с ускорением (перегрузкой) \mathbf{a} , вращается с постоянной угловой скоростью и через слой вязкой несжимаемой жидкости приводит в движение внутренний цилиндр. ρ_2, ρ – плотности внутреннего тела и жидкости; В безразмерных переменных: t – время, β – относительный зазор, J – момент инерции γ – нагруженность подвеса, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, ω – смещение и «проскальзывание» внутреннего цилиндра, h – толщина поддерживающего слоя, ξ – безразмерная радиальная координата, v_r, v_φ, p – радиальная, касательная скорость и давление в жидкости; \mathbf{N}, G – сила и момент сил, σ – колебательное число Рейнольдса

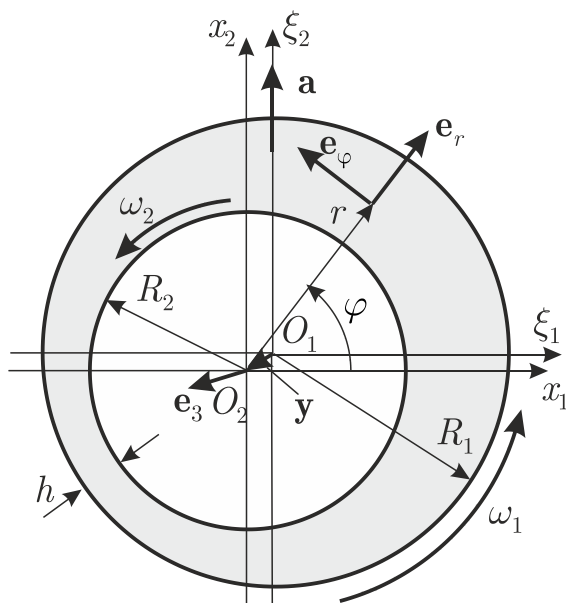


Рисунок 2 – Конструктивная схема

Входная и выходная функции:

$$\mathbf{x}_{\text{кдс}}(t) = \mathbf{a}(t),$$

$$\mathbf{y}_{\text{кдс}}(t) = (y_1(t), y_2(t), \omega(t))^T$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T.$$

После приведения модельных уравнений к безразмерным параметрам получаем:

$$\pi\beta \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \ddot{\mathbf{y}} = \pi \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \gamma (\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad \pi \frac{\rho_2}{\rho} J \dot{\omega} = -\frac{\beta}{\sigma} G, \quad \mathbf{g} = (0, -1)^T;$$

$$h(\varphi, t) = 1 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{2} \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)]$$

$$v_r = -(1 - \beta \xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad U = (1 - \beta \xi) \left(v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi d\xi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi^2 d\xi \right)$$

$$\partial v_\varphi / \partial t = \mathbb{F}[\mathbf{v}] - (1 - \beta \xi) \Pi(\varphi, t)$$

$$\mathbb{F}[\mathbf{v}] = - \left[1 + (1 - \beta \xi) v_\varphi \right] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta U + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$v_\varphi \Big|_{\xi=0} = -\omega, \quad v_\varphi \Big|_{\xi=h} = \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \Pi(\varphi, t) \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\varphi$$

Третий раздел «Программная реализация и исследование эффективности алгоритмов» посвящен реализации приложения и исследованию эффективности оптимизированных алгоритмов.

Для моделирования нелинейной динамики цилиндрического динамического подвеса была разработана программа для персональных компьютеров и рабочих станций, работающих под управлением ОС Windows x64. При разработке использовались компиляторы Microsoft Visual C++/C# 2019 и Intel C++ 19.2 (поддерживает стандарт OpenMP 4.5, позволяющий выполнять создание наборов параллельно выполняющихся задач, и управлять их выполнением). Так же для разработки использовались: BLAS/LAPACK, Intel Math Kernel Library, ODEPACK.

Классы, реализующие моделирование нелинейной динамики подвеса и его выходные функции, были помещены оптимизирующим компилятором Intel C++ в динамически загружаемую библиотеку (DLL). Через переходник, т.е. помещенную в разделяемую библиотеку (DLL) «смешанную» сборку MS Visual C++ они доступны для головного приложения, разработанного для платформы .NET на языке C#. Головное приложение использует фреймворк Windows Forms для создания графического интерфейса пользователя и

рабочие книги MS Excel в качестве источника и приемника данных. Вид главного диалогового окна приложения показан на рис. 3.

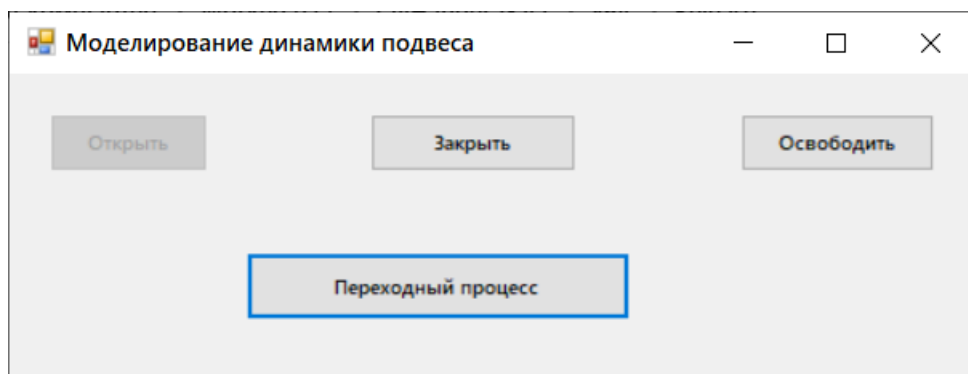


Рисунок 3 – Главное диалоговое окно приложения

Для оценки эффективности последовательных и параллельных версий разработанных алгоритмов приведем сравнение характерных затрат машинного времени при моделировании выходных функций цилиндрического гидродинамического подвеса на компьютере с четырехъядерным процессором Intel Core i7 1065 G7. В таблице ниже показано среднее время выполнения алгоритма по результатам пяти вычислительных экспериментов. В первых двух столбцах представлены размерности отрезков рядов Фурье проекционного метода Галеркина. В третьем столбце представлено время выполнения (в секундах) последовательной версии алгоритма на основе метода Адамса, в четвертом – аналога данного алгоритма с распараллеливанием вычисления скалярных произведений проекционного метода и перемножения двукратных рядов Фурье-Чебышева. В пятом столбце представлено время выполнения (в секундах) последовательной версии алгоритма на основе ФДН-метода, в шестом – его аналога с распараллеливанием вычисления скалярных произведений проекционного метода Галеркина и распараллеливанием вычисления отдельных столбцов матрицы Якоби. В седьмом столбце представлено время выполнения (в секундах) алгоритма на основе ФДН-метода с распараллеливанием вычисления скалярных произведений проекционного метода Галёркина, распараллеливанием вычисления отдельных столбцов матрицы Якоби и распараллеливанием перемножения отрезков двойных рядов Фурье-Чебышева.

Для подвеса с параметрами $\beta = 0.2$, $\rho_2 / \rho = 0.594$, $J = 0.5$, $\gamma = 1.847$, $\sigma = 10$ при $a = 0.355$ данные о затратах машинного времени численного моделирования выходных функций по уточненной модели приведены в таблице 1.

Таблица 1. Время численного моделирования, с.

N_x	N_φ	Адамс, послед.	Адамс, парал.	ФДН, послед.	ФДН, парал.	ФДН, парал., парал.
7	10	4909	7926	23.8	10.9	11.2
9	10	25346	41550	41.3	17.3	17.4
11	10	45783	75054	58.7	23.6	23.6
13	10	66220	108557	76.2	29.9	29.8
15	10	86657	142060	93.6	36.2	35.9
7	15	13434	20425	125	54.0	53.5

Как видно из представленных данных, переход к оптимизированной версии алгоритма на основе ФДН-метода позволяет как минимум на порядок сократить время компьютерного моделирования. Далее, оптимизированный алгоритм ощутимо ускоряется за счет распараллеливания столбцов матрицы Якоби. Сокращение времени компьютерного моделирования составляет от 450 до 2400 раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компьютерное моделирование выходных функций в нелинейных комбинированных динамических системах целесообразно выполнять на основе дискретизации уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным при помощи проекционного метода Галеркина и дальнейшего численного интегрирования задачи Коши для полученной в результате системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оптимизация алгоритмов компьютерного моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах может быть выполнена на основе применения «жестко устойчивого» ФДН-метода, вычисления столбцов матрицы Якоби на основе применения проекционного метода к линеаризованным уравнениям возмущенного движения и распараллеливания вычисления отдельных столбцов матрицы Якоби.

По результатам численного моделирования показано, что цилиндрический гидродинамический подвес остается устойчивым по отношению к конечным скачкам внешних перегрузок, если относительный эксцентриситет взаимного расположения внешнего и внутреннего цилиндров не выходит за пределы области устойчивости, найденной ранее по линеаризованной модели. При этом использованная в данной работе уточненная модель цилиндрического гидродинамического подвеса обладает большим запасом устойчивости и приводит к несколько меньшим характерным значениям смещений внутреннего цилиндра и несколько меньшим значениям амплитуд его колебаний.

В зависимости от параметров цилиндрического гидродинамического подвеса и размерности задачи, оптимизация и распараллеливание алгоритмов моделирования выходных функций нелинейных КДС позволяет сократить время компьютерного моделирования от 28 до 2400 раз.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андрейченко, Д.К. К теории комбинированных динамических систем/ Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54-69.
2. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем. Учебное пособие/ Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко. Саратов: ООО «Издательский Дом «Райт-Экспо», 2013. 144 с. ISBN 978-5-4426-0018-6.
3. Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями / Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко, М.С. Комарова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2012. – № 4. – С. 101-114.
4. Эндрюс, Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределённого программирования / Г.Р. Эндрюс; под ред. А. Б. Ставровского. М.; СПб.; Киев : Вильямс, 2003. 505 с.
5. Гергель, В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем/ В.П. Гергель. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 421 с.
6. Гергель, В.П. Теория и практика параллельных вычислений/В. П. Гергель. М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий: БИНОМ. Лаб. знаний, 2007,2010. 424 с.
7. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина/ К. Флетчер. М.: Мир, 1988. 352 с.
8. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа/ Е.Е. Тыртышников. М.: 2006. 291 с.
9. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи/ Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. М.: Мир, 1990. 512 с.
10. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи/ Э. Хайрер, Г. Ваннер. М.: Мир, 1999. 685 с.