МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Жёсткие фреймы Мальцева

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Тептюка Данила Сергеевича

Научный руководитель
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Саратов 2023

Введение. Бурное развитие теории фреймов началось в конце 80-х годов века в связи с возникновением и развитием теории вейвлетов. Интерес к фреймам связан с тем, что в отличии от классического базиса в определении фрейма отсутствует требование линейной независимости, что позволяет строить фреймы сколь угодно большого объема. Тем не менее, оказалось верным то, что любой элемент гильбертова пространства можно разложить по фрейму, причем не единственным образом. Такие представления имеют определенную ценность для многих прикладных вопросов, так как свойство избыточности фрейма позволяет восстановить исходный сигнал, даже если при передачи по сети некоторые из его коэффициентов разложения по фрейму были потеряны. Кроме того фреймы находят широкое применение в цифровой обработке сигналов, сжатии информации, удалении помех. В каждой из перечисленных областей уделяется особое внимание фрейма специального вида, в том числе и равномерным фреймам. Использование таких фреймов упрощает многие вычислительные процедуры.

Заметка А. И. Мальцева 1947 г. опередила время на десятилетия, она оказалась пропущенной специалистами по теории Фреймов, и именно Анатолия Ивановича Мальцева следует считать автором первой в мире конструкции равномерного жесткого фрейма в пространстве $\mathbb{R}^d$. Упомянутая заметка рассмотрена с позиции современной теории фреймов в конечномерных пространствах.

Основное содержание работы. Рассмотрим важные определения.

Определение 1.3. Семейство векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется фреймом пространства $\mathbb{R}^d$, если существуют константы $0 < a \leq b < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$a\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle x, \varphi_j \rangle|^2 \leq b\|x\|^2 \ .$$

Определение 1.4. Числа a и b называются фреймовыми границами, они определены неоднозначно, обычно имеют ввиду оптимальные границы, т.е минимум b и максимум a.

Определение 1.6. Фрейм называется:

а) жестким, если $a = b$;

b) фреймом Парсеваля, если $a = b = 1$;

c) равномерным, если существует $c > 0$ такое, что $\|\varphi_j\|^2 = c, \quad j = 1, \ldots, n$.

Жесткий фрейм допускает представление произвольного вектора из $\mathbb{R}^d$ в форме, максимально похожей на представление в ортонормированном базисе.

Нас будут интересовать жёсткие фреймы в конечномерных евклидовых пространствах, для которых мы определим ещё одну характеристику.

Определение 1.7. Количество векторов, составляющих фрейм называется объемом фрейма.

В соответствии с рисунком 1.1 покажем пример жестких фреймов.

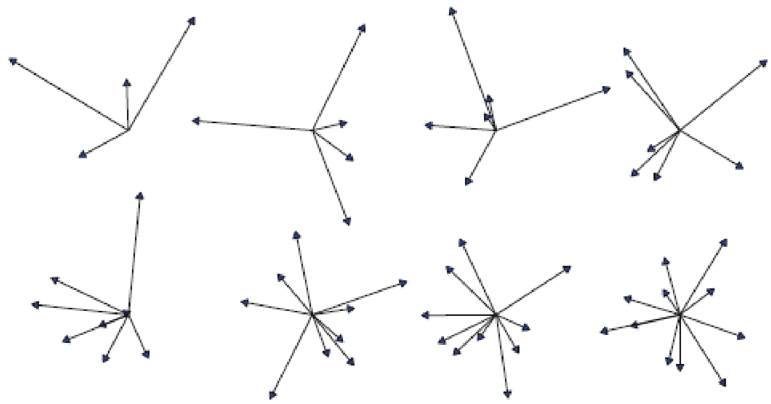

Рисунок 1.1 — Жесткие фреймы $n = 4, 5, \ldots, 11$ векторов из $\mathbb{R}^2$

Определение 1.8. Оператор синтеза конечного набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{R}^d$ определяется как:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, \Phi x := \sum_{j=1}^{n} x(j)\varphi_j, \tag{1.1}$$

где $x(j)$ обозначает j-ю координату $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.9. Сопряженным к оператору синтеза является оператор анализа $\Phi^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, определяемый как:

$$(\Phi^* y)(j) = \langle \varphi_j, y \rangle, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

При работе с жесткими фреймами нам понадобится их эквивалентное определение, которое в литературе иногда называется свойством разложимости.

Определение 1.10. Пусть V - n-мерное евклидово пространство. Система ненулевых векторов

$$\Phi = \{v_j,\, j = 1, \dots, l\}$$

из V образует жесткий фрейм с границей $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, если для любого вектора $v \in V$ выполняется равенство:

$$\sum_{j=1}^{l} (v, v_j) v_j = \lambda \cdot v. \tag{1.3}$$

Стоит отметить, что аналогичное свойство справедливо и для гильбертовых пространств. Поскольку разложение (1.3) справедливо для любого вектора $v \in V$, то фрейм как система вектора имеет ранг n, откуда следует неравенство для объема $l \geq n$. Нетрудно заметить, что равенство $l = n$ возможно лишь в том случае, когда система Φ состоит из ортогональных векторов одинаковой длины $\sqrt{\lambda}$, для этого в равенстве (1.3) достаточно положить $v = v_j$ и использовать единственность разложения по базису. Таким образом, равенство $l = n$ отвечает весьма частному случаю фрейма, а общий случаю соответствует неравентсву $l > n$.[1]

Лемма 1.1. Пусть $G = \{g_i^j, 1 \leq i, j \leq n\}$ - матрица Грама для базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$, $g_i^j = (\varphi_i, \varphi_j)$. Тогда система

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m\}$$

образует жесткий фрейм с границей λ тогда и только тогда, когда матрицы A и G удовлетворяют уравнению:

[1] Новиков С.Я. Матрицы операторов синтеза равномерного жесткого фрейма с полным спарком в $\mathbb{R}^d$ / С.Я. Новиков, Д.А. Рогач. - Саратов: Научная книга, 2020. - 281 - 283 с.

$$(A \cdot A^T + E) \cdot G = \lambda \cdot E \Leftrightarrow A \cdot A^T = \lambda \cdot G^{-1} - E, \qquad (1.4)$$

где A^T - транспонированная матрица A.

Пример 1.1. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - ортонормированный базис пространства V, а система $\{v_1, \ldots, v_l\}, l > n$, образует жесткий фрейм с границей μ. Тогда базис E можно дополнить до жесткого фрейма с границей $\lambda = \mu + 1$ как минимум двумя различными способами:

1) $\{e_1, \ldots, e_n, v_1, \ldots, v_l\}$,

2) $\{e_1, \ldots, e_n, \sqrt{\mu}e_1, \ldots, \sqrt{\mu}e_n\}$.

Определение 1.11. Система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в $\mathbb{R}^n$ называется фреймом Парсеваля, если:

$$\sum_{k=1}^{m} [\langle x, x_k \rangle]^2 = \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (1.6)$$

Предложение 1.1. Система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^{m-n}$, при этом выполнены соотношения:

$$\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 = 1, \qquad (1.10)$$

$$\langle x_k, x_s \rangle + \langle y_k, y_s \rangle = 0; \qquad k \neq s. \qquad (1.11)$$

Определение 1.12. Постоенный фрейм $\{y_1, ..., y_m\}$ называется дополнительным фреймом Парсеваля. Он обладает характерным свойством:

$$\langle y_k, y_s \rangle = -\langle x_k, x_s \rangle = 0; \qquad k \neq s. \qquad (1.12)$$

Пусть $\mathbb{H}^n$ - это либо вещественное пространство $\mathbb{R}^n$, либо комплексное пространство $\mathbb{C}^n$.

Определение 1.13. Система векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ из $\mathbb{H}^n$ называется равноугольным жестким фреймом, если:

$$1) |\varphi_k\| = 1,\ k \in 1 : m$$
$$2) |\langle \varphi_k, \varphi_s \rangle| = c,\ k \neq s.$$
$$3) \sum_{k=1}^{m} [\langle x, \varphi_k \rangle]^2 = A\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где c и A - некоторые константы.

Нас интересует случай $m \geq n$. При $m = n$ любой ортонормированный базис в $\mathbb{H}^n$ образует равноугольную систему, у которой $c = 0$.

В силу нормированности векторов, входящих в равноугольную систему, для константы c выполняется неравенство $c \geq 1$. При $c < 1$ количество элементов m равноугольной системы не превосходит числа $n(n+1)/2$ в вещественном случае ($\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n$) и числа n^2 в комплексном случае ($\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n$).[2]

Определение 1.14. Жесткий фрейм, состоящий из единичных векторов, характеризуется равенством:

$$P(\Phi) = \frac{m^2}{n}. \tag{1.13}$$

Теорема 1.2. Равноугольная система является жестким фреймом тогда и только тогда, когда

$$c = \sqrt{\frac{m-n}{n(m-1)}}. \tag{1.14}$$

Следствие 1.1. При $m = n$ равноугольная система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ будет жестким фреймом тогда и только тогда, когда $c = 0$, т.е когда Φ - ортонормированный базис в $\mathbb{H}^n$.

[2] Фарков Ю.А. Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолна / Ю.А. Фарков, М.Г. Робакидзе. - М: Математические заметки, 2019. - 457 - 469 с.

Пример 1.3. При $m = n+1$ примером равноугольной системы являющийся жестким фреймом, служит система Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \dots, b_{n+1}^n\}$, у которой

$$\langle b_k^n, b_s^n \rangle = -\frac{1}{n}; \quad k \neq s.$$

Отметим, что если из системы Мерседес-Бенц удалить один элемент, то оставшаяся система, не теряя свойства равноугольности и величины c, уже не будет жестким фреймом.

Теорема 1.3. Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}, m \geq n$ - равноугольная система в $\mathbb{R}^n$ и $c \in [0, 1)$. Тогда:

$$m \leq \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.18}$$

Теорема 1.4. Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $m \geq n$ - равноугольная система в $\mathbb{C}^n$ и $c \in [0, 1)$. Тогда:

$$m \leq n^2. \tag{1.22}$$

Процесс построения дополнительного фрейма можно конкретизировать следующим образом:

1. Введем нормированные векторы-строки:

$$s_i = \sqrt{\frac{n}{m}}\gamma_i,\, i \in 1 : n, \quad (\|s_i\| = 1).$$

2. Дополним систему $\{s_1, \dots, s_n\}$ строки $s_{n+1}, \dots, s_m$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$. Из строк $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}), i \in 1 : m$, составим матрицу S. Кроме того, выполнено равенство $S^T S = I_m$, которое означает, что столбцы матрицы S также образуют ортонормированную систему. Столбец S с номером k можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n,\, y_k \in \mathbb{R}^{m-n}.$$

Условие ортонормированности записывается так:

$$\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2 = 1, \quad k \in 1:m;$$

$$\langle x_k, x_j \rangle + \langle y_k, y_j \rangle = 0, \quad k \neq j.$$

3. По предложению 1.1 система $\{y_1, ..., y_m\}$ является жестким фреймом в $\mathbb{R}^{m-n}$, который называется дополнительным к фрейму $\{x_1, ..., x_m\}$.
По построению

$$x_k = \sqrt{\frac{n}{m}}\varphi_k, \qquad \|x_k\| = \sqrt{\frac{n}{m}}, \qquad k \in 1:m.$$

Отсюда и из условия ортонормированности следует, что

$$\|y_k\| = \sqrt{1 - \|x_k\|^2} = \sqrt{\frac{m-n}{m}}, \quad k \in 1:m.$$

Нормированные векторы $\psi_k = \sqrt{\frac{m}{m-n}}y_k$, $k \in 1:m$, образует дополнительный равноугольный жесткий фрейм.

Введем симметричную матрицу размера $m \times m$:

$$Q[i,k] = \begin{cases} 0, \quad i = k, \\ \mathrm{sign}\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle, \quad i \neq k, \end{cases}$$

которая является конференц-матрицей.[3]

Теорема 2.1. В пространстве $\mathbb{R}^d$ существует фрейм Парсеваля $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ с одинаковыми нормами для любого $n \geq d$.

Определение 2.1. Пусть $X_d^n = \{x_j\}_{j=1}^d$ - набор векторов из $\mathbb{R}^d$ такой, что $\|x_j\| = 1$ для любого j. Максимальную корреляцию в $\mathbb{R}^d$ обозначим $d_\infty(X_d^n)$ и определим как

[3]Максименко В.В. Построение равноугольных жестких фреймов / В.В. Максименко - Текст: Молодой ученый, 2010. - 15 - 19 с.

$$d_\infty(X_d^n) = \max_{j \neq p} |<x_j, x_p>|.$$

Определение 2.2. Последовательность $\Phi_d^n = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{R}^d$ такую, что $\|x_j\| = 1$ для любого j назовем (n, d) - фреймом Грассмана, если она является фреймом и выполняется равенство:

$$d_\infty(\Phi_d^n) = \inf d_\infty(X_d^n),$$

где инфиниум берется по всем наборам из d единичных векторов.

Определение 2.3. Набор нормированных векторов $X_d^n = \{x_j\}_{j=1}^d$ называется равноугольным, если существует число $\alpha \in [0, 1]$ такое, что выполняется равенство $|<x_j, x_p>| = \alpha$ для $j \neq p$.

Теорема 2.2. Пусть $X_d^n = \{x_j\}_{j=1}^d$ - набор нормированных векторов пространства $\mathbb{R}^d$ и пусть $d_0 = \dim(\mathrm{span}(X_d^n))$. Тогда справедливо неравенство

$$d_\infty(X_d^n) \geq \sqrt{\frac{n - d_0}{d_0(n-1)}},$$

причем равенство в указанном неравенстве имеет место тогда только тогда, когда справедливы два следующих условия:

1) набор векторов (X_d^n) - равноугольный;

2) набор векторов (X_d^n) - жесткий фрейм с границей $a = b = \frac{n}{d_0}$.

Кроме того, если $n > \frac{d(d+1)}{2}$, то X_d^n не может быть равноугольным и, следовательно, равенство в рассматриваемом неравенстве невозможно.

Введем понятие 2-равномерного фрейма, используя множество матриц D_m:

Определение 2.5. Множество D_m - это множество диагональных матриц, которые имеют m-диагональных элементов равных 1 и остальные $m - N$ элементов равны нулю.

Определение 2.6. Фрейм Φ_d^n называется 2-равномерным, если Φ_d^n - фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами и $\|\Phi D \Phi^*\|$ равно константе для любой диагональной матрицы $D \in D^2$.

Теорема 2.3. Фрейм Парсеваля Φ_d^n является 2-равномерным тогда и только тогда, когда $|<\varphi_j, \varphi_p>| = C_{n,d}$ для любого j и p, и

$$C_{n,d} = \sqrt{\frac{d(n-d)}{n^2(n-1)}}.$$

Результат работы М. А. Наймарка оказался основой для численных конструкций фреймов упоминается в различных статьях, посвященных фреймам и их приложениям.

Теорема 2.4. Если $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ - фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^d$, то существует ортонормированный базис $\{b_j\}_{j=1}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi_j = P_{\mathbb{R}^d} b_j$ для всех j, где $P_{\mathbb{R}^d}$ обозначает ортогональный проектор из пространства $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2.5. Если $\{b_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, то $\Phi = \{P_{\mathbb{R}^d} b_j\}_{j=1}^n$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{R}^d$, здесь $P_{\mathbb{R}^d}$ - ортогональный проектор в $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2.6. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ - фрейм в $\mathbb{R}^d$. Тогда координаты векторов φ_j могут рассматриваться как первые d координат векторов в $\mathbb{R}^n$, которые образуют в $\mathbb{R}^n$. Если $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ - жесткий фрейм, то координаты векторов φ_j являются первыми d координатами некоторых векторов, которые образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$.[4]

Определение 2.7. Матрица, строки которой, как векторы евклидова пространства, ортогональны и имеют единичную длину, а стоблцы этой матрицы, как векторы, имеют одинаковую длину называется матрицей Мальцева.

Лемма 2.1. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ - a-жесткий фрейм $\mathbb{R}^d$, $d < n$. Тогда матрицей ортогонального проектора на d-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ является n-мерная матрица $(1/a)\Phi^*\Phi$.

Теорема 2.7. Каждый a-жесткий фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{R}^d$ имеет дополнительный по Наймарку фрейм $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ со следующими свойствами:

1. $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ является a-жесткий фрейм для $\mathbb{R}^{(n-d)}$;
2. матрица Грама $\Psi^*\Psi = aI_{\mathbb{R}^n} - \Phi^*\Phi$;
3. $\Phi\Psi^* = 0$.

Определение 2.8. Спарком $(d \times n)$-матрицы Φ называется наименьшее количество линейно зависимых столбцов Φ.

---

[4]Драбкова Е.С. Объем фрейма Парсеваля / Е.С. Драбкова, С.Я. Новиков. - Самара: Естественно научная серия, 2007. - 91 - 106 с.

Предложение 2.1. В равномерном жестком фрейме Мальцева с $n \geq 4$ существуют 4 линейно зависимых вектора.

Предложение 2.2. Жесткий фрейм Мальцева может быть фреймом с полным спарком, только при условии $\mathrm{spark}(\Phi) = d + 1 \leq 4$.[5]

Заключение. В данной работе были изложены основные понятия связанные с жесткими фреймами, а также способы их построения. Были рассмотрены равноугольные системы векторов и построение дополнительных жестких фреймов.

Достоинствами жестких фреймов является их широкое применение в цифровой обработке сигналов, сжатии информации, удалении помех. Также использование жестких фреймов помогает при решении многие вычислительные задач.

Были описаны Фреймы Грассмана и равномерные фреймы Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^d$. Также была упомянута и доказана теорема Наймарка.

В ходе выполнения работы были рассмотрены равномерные жесткие фреймы Мальцева, также была описана матрица Мальцева. Был приведен пример построения матрицы Адамара по алгоритму Мальцева. Показан алгорит построения равномерных жестких фреймов Мальцева.

[5]Новиков С.Я. Равномерные жесткие фреймы Мальцева / С.Я. Новиков, В.В. Севостьянова. - М: РАН, 2022. - 162 - 174 с.