МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Пространства матриц и выпуклые многогранники

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Саутиной Юлианы Евгеньевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________ Е. В. Коробченко

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Саратов 2023

Введение. Тема «Пространства матриц и выпуклые многогранники» является актуальной и важной в различных областях науки и техники, таких как математика, физика, инженерия и компьютерные науки.

В математике и физике пермутоэдры используются для изучения симметрий и групп Ли, а также для моделирования квантовых систем и спектров операторов. Пространства матриц являются основой для изучения линейных преобразований, оптимизации и линейного программирования. Они также используются в теории графов, теории кодирования и криптографии.

В компьютерных науках пермутоэдры и анализ трехдиагональных матриц используются в разработке алгоритмов и методов обработки данных, а также для решения задач машинного обучения, включая классификацию, кластеризацию, регрессию, распознавание образов и обработку изображений.

Цель данной работы - изучить пространства пермутоэдров и трёхдиагональных матриц, исследовать связь между пространствами матриц и выпуклыми многогранниками, а также рассмотреть свойства этих объектов и их применение в различных областях математики и приложений. В работе будут рассмотрены основные понятия и определения, связанные с этими объектами, а также представлены основные методы и алгоритмы для работы с ними.

Структура работы включает в себя следующие основные элементы: введение, основная часть из 4-х разделов, заключение, список использованных источников, приложение.

В первом разделе работы рассмотрено определение пермутоэдра и пространство квадратных матриц. Приведены теорема Биркгофа и важная теорема Хорна-Шура, в которой доказывается, что множество диагоналей эрмитовых матриц совпадает с пермутоэдром соответствующей размерности.

Во втором разделе начинается изучение трехдиагональных матриц. Рассматриваются основные теоретические данные о QR-разложении, которое используется для алгоритмов нахождения собственных значений. Доказывается теорема Мозера, которая гласит, что пространство трехдиагональных матриц гомеоморфно пространству действительных чисел на 1 меньшей размерности и теорема Томеи, что пространство трехдиагональных матриц гомеоморфно и комбинаторно эквивалентно пермутоэдру на 1 меньшей размерности. А также приводятся другие вспомогательные определения, леммы и теоремы.

В третьем разделе работы рассматриваются периодические трехдиагональные матрицы и их связь с пространством пермутоэдров. Вводятся понятия правильного пермутоэдра, симплициальной решетки, разбиения Вороного и др. Приводится теорема Ван-Мёрбеке, которая утверждает, что некоторое отображение расслаивает пространство пермутоэдров на семейство торов на 1 меньшей размерности.

В заключительном разделе происходит ознакомление с другими пространствами матриц.

Основное содержание работы. В первом разделе работы, который называется «Теорема Хорна-Шура», рассмотрены следующие важные составляющие.

Определение 1.1. Пусть $b = (b_1, \dots, b_n) \in R^n$ – набор попарно различных вещественных чисел. Будем считать, что они упорядочены по возрастанию: $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Рассмотрим в R^n выпуклый многогранник

$$Pe_b = conv\left\{\left(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}\right) \mid \sigma \in \sum_n\right\}.$$

Он называется перестановочным многогранником или пермутоэдром.

Замечание 1.2. Пусть $x_1 \leq \dots \leq x_n$ Тогда $(x_1, \dots, x_n) \in Pe_b$ в том и только том случае, когда выполнена система неравенств

$$x_n \leq b_n;$$

$$x_{n-1} + x_n \leq b_{n-1} + b_n;$$

$$x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \leq b_{n-2} + b_{n-1} + b_n;$$

$$\dots$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n;$$

Это позволяет задать Pe_b при помощи системы неравенств.

Видно, что $dimPe_b = n - 1$, поскольку пермутоэдр лежит в гиперплоскости $\sum x_i = \sum b_i = const$. Комбинаторная структура этого многогранника не зависит от выбора b, поэтому пермутоэдр будем обозначать Pe^{n-1}.

Пример 1.2. Рассмотрим пермутоэдр Pe_b при $b = (1, 2, 3, 4)$, изображенный на рисунке 2. Он состоит из шестиугольников и четырёхугольников.

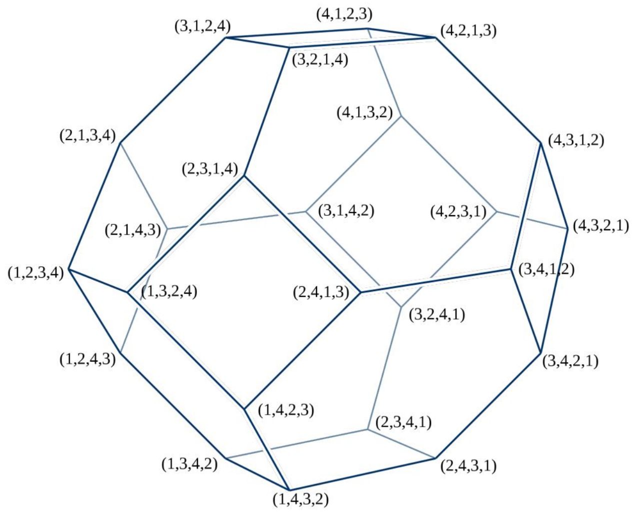

Рисунок 2 – Пермутоэдр Pe_b при $b = (1, 2, 3, 4)$

Определение 1.3. Вещественная матрица называется дважды стохастической, если все её элементы неотрицательны и суммы элементов в каждой строке и в каждом столбце равны 1.

Теорема 1.1. (Биркгофа) [1] Множество дважды стохастических матриц является выпуклой оболочкой перестановочных матриц, причем ни одна из перестановочных матриц не лежит в выпуклой оболочке остальных. Иными словами, множество DS_n дважды стохастических матриц есть выпуклый многогранник с вершинами A_σ для всевозможных перестановок $\sigma \in \sum_n$.

Определение 1.5. Многогранник DS_n всех дважды стохастических матриц называется многогранником Биркгофа. Его размерность $dimDS_n = (n - 1)^2$.

Теорема 1.2. (Хорна-Шура) Множество $\mu\left(M_\lambda(C)\right)$ диагоналей эрмитовых матриц со спектром λ, совпадает с пермутоэдром Pe_λ.

Второй раздел работы посвящен изучению трехдиагональных матриц.

Теорема 2.1. Пусть A — матрица размера $m \times n$, причем $m \geq n$. Предположим, что A имеет полный столбцевой ранг. Тогда существуют и единственны $m \times n$-матрица Q с ортонормированными столбцами (то есть $Q^T Q = E_n$) и верхнетреугольная $n \times n$-матрица R с положительными диагональными элемантами r_{ii}, такие, что $A = QR$.

[1]В.В.Прасолов, Задачи и теоремы линейной алгебры, Москва 2008.

Определение 2.2. Вещественные матрицы вида

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

называются трехдиагональными (симметричными) матрицами.

Рассмотрим следующие подмножества

$$TD^{>}_{n,\lambda} = \{A(a,b) \in TD_{n,\lambda} \ | \quad b_i > 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n-1\}$$

$$TD^{\geq}_{n,\lambda} = \{A(a,b) \in TD_{n,\lambda} \ | \quad b_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n-1\} = \overline{TD^{>}_{n,\lambda}}.$$

Теорема 2.2. (Мозера) Пространство $TD^{\geq}_{n,\lambda}$ гомеоморфно R^{n-1}.

Рассмотрим комбинаторное описание пермутоэдра: Pe_b задается равенством

$$x_1 + \cdots + x_n = b_1 + \cdots + b_n \tag{2.1}$$

и набором неравенств:

$$x_i \leq b_n;$$

$$x_i + x_j \leq b_{n-1} + b_n;$$

$$x_i + x_j + x_k \leq b_{n-2} + b_{n-1} + b_n;$$

$$\dots$$

$$x_1 + \cdots + \widehat{x_i} + \cdots + x_n \leq b_2 + b_3 + \cdots + b_n,$$

где $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$.

Первая строчка неравенств высекает на гиперплоскости (2.1) симплекс. Последняя строчка означает, что у симплекса срезаются вершины. Предпоследняя строчка: срез рёбер, которые были рёбрами исходного симплекса, и т.д. Отсюда следует

Лемма 2.2. Многогранник Pe^{n-1} получается из симплекса Δ^{n-1} последовательной срезкой его граней.

Предложение 2.1. Набор гиперграней $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ имеет непустое пересечение в том и только том случае, когда подмножества $S_1, \dots, S_k \subset [n]$ можно переупорядочить так, чтобы они образовывали цепь

$$S_1, \dots, S_k \subset [n]. \quad (2.2)$$

Пересечение $F_{S_1} \cap \dots \cap F_{S_k}$ является гранью Pe^{n-1} размерности $n-1-k$

Определение 2.3. k-мерный многогранник называется простым, если каждая его вершина содержится ровно в k гипергранях (или, что эквивалентно, из каждой вершины выходит ровно k рёбер).

Замечание 2.3. Пермутоэдр - простой многогранник.

Теорема 2.4. (Томеи) Пространство $TD^{\geqslant}_{n,\lambda}$ гомеоморфно и комбинаторно эквивалентно пермутоэдру Pe^{n-1}.

На рисунке 4 разобрана структура многообразия Томеи $TD_{n,\lambda}$. при $n = 3$, которое склеено из 4-х шестиугольников.

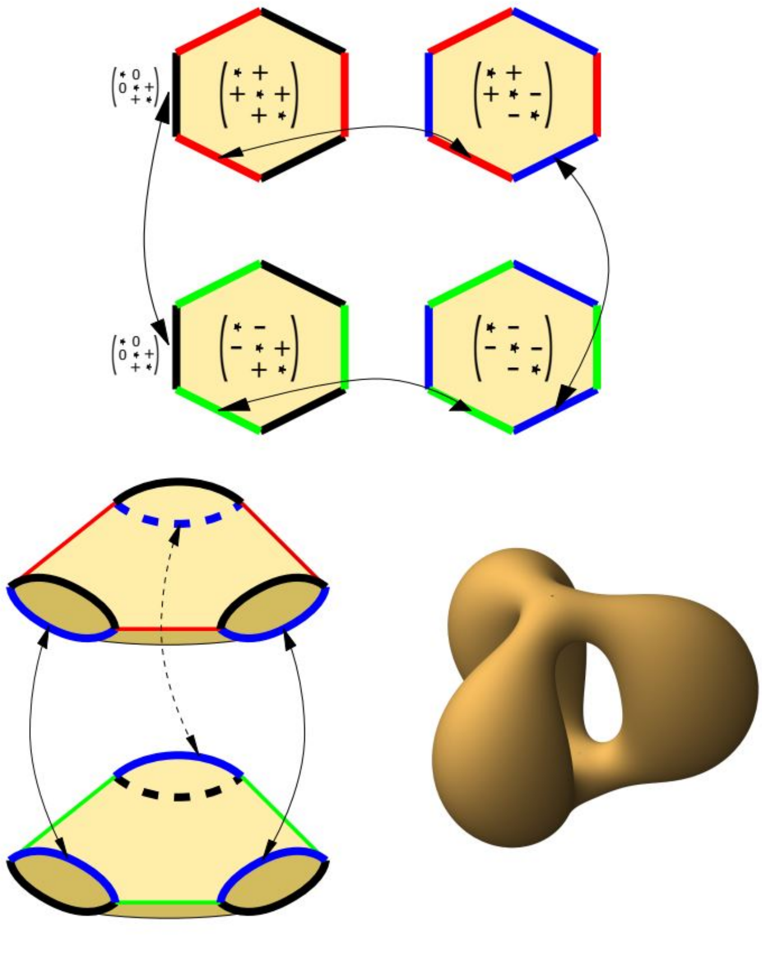

Рисунок 4 – Структура многообразия Томеи

В третьем разделе работы, исследуются периодические трехдиагональные матрицы и их связь с пространством пермутоэдров.

Определение 3.1. Пермутоэдр $Pe_b, b = (b_1, \dots, b_n)$ называется правильным, если числа $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ образуют арифметическую прогрессию.

Определение 3.2. Пусть $M \subset R^k$ дискретное множество точек в евклидовом пространстве. Для каждой точки $x \in M$ определим множество

$$C_x = \{y \in R \mid dist(y, x) \leq dist(y, x') \ \forall x' \in M, \ x' \neq x\},$$

называемое клеткой Вороного. Все пространство оказывается замощено клетками Вороного

$$R^k = \bigcup_{x \in M} C_x$$

Такое разбиение называется разбиением Вороного.

Определение 3.3. Решеткой в R^k называется подмножество вида

$$M = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s \mid \alpha_i \in Z\},$$

где $v_1, \dots, v_s \in R^k$ фиксированный набор линейно независимых векторов в евклидовом пространстве, называемый порождающими решетки. Если $s = k$, то решетка называется кокомпактной.

Определение 3.5. Правильной симплициальной решеткой $N \subset R^{n-1}$ будем называть кокомпактную решетку, порожденную векторами $v_1, \dots, v_{n-1}$, такими что

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i$$

– правильный набор.

При $n = 3$ (то есть на плоскости) получается правильная треугольная решетка, изображенная на рисунке 5.

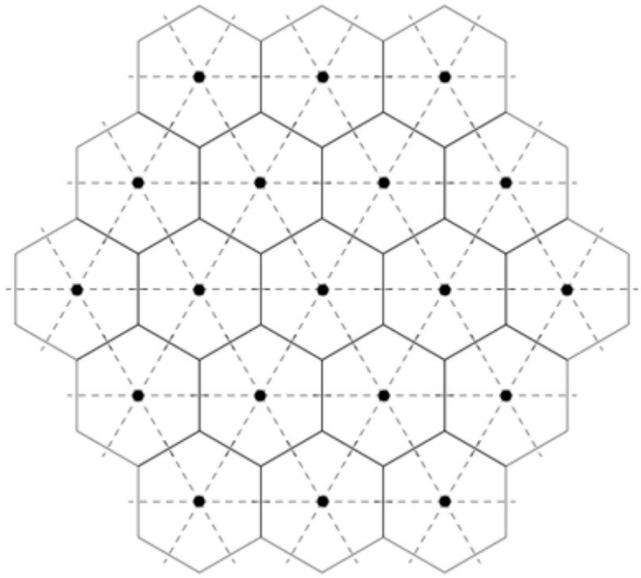

Рисунок 5 – Правильная треугольная решетка и ее разбиение Вороного

Предложение 3.2. Клетка Вороного правильной симплициальной решетки в R^{n-1} – это правильный пермутоэдр Pe^{n-1}.

Пример 3.2. Пусть $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} v_i$ – правильный набор векторов, порождающий правильную симплициальную решетку $N \subset R^{n-1}$. Рассмотрим набор

$$\widehat{N} = \{\omega_i = v_i - v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Тогда получим, что тор $R^{n-1}/\widehat{N}$ разбит на n пермутоэдров Pe^{n-1}. Это разбиение будет называться замечательным разбиением тора и обозначаться WT_{n-1}. Рассмотрим примеры, приведенные на рисунках 7, 8.

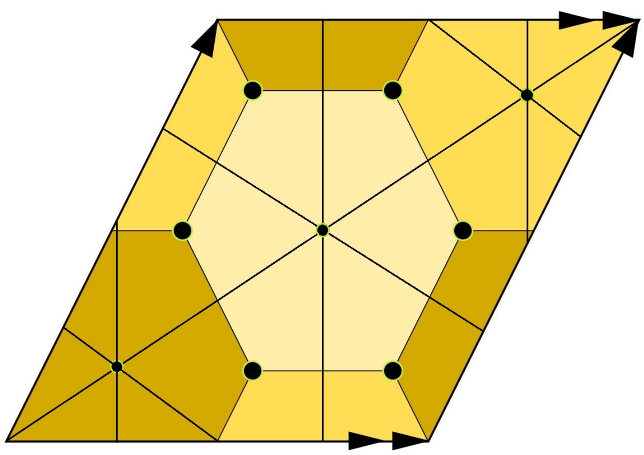

Рисунок 7 – Замечательное и двойственное к нему разбиение WT_2, $n = 3$

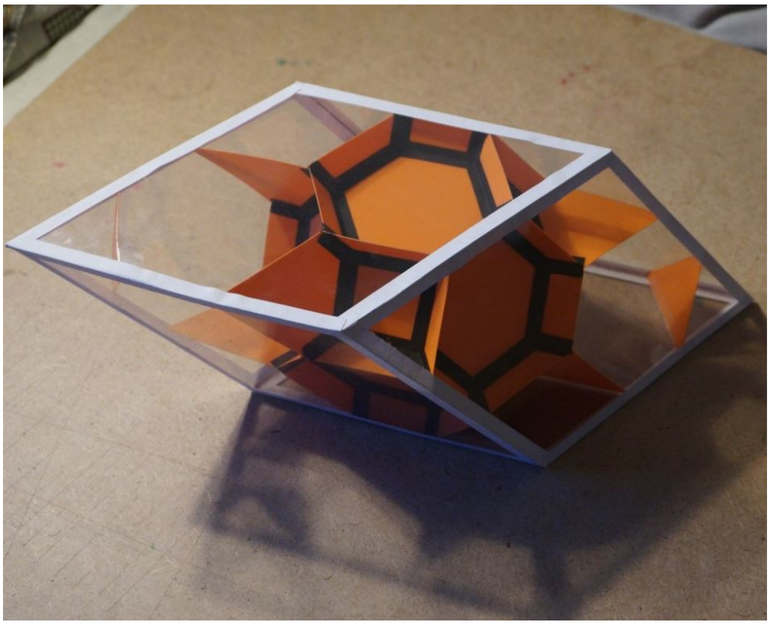

Рисунок 8 – Замечательное разбиение $WT_3,\ n = 4$

Такое разбиение WT_{n-1} является регулярным и минимальным по числу максимальных клеток.

У разбиения WT^*_{n-1} двойственного к WT_{n-1} все клетки являются симплексами. Разбиение WT^*_{n-1} является минимальным по числу вершин симплициально клеточным разбиением тора.

Определение 3.6. Периодической трехдиагональной (симметричной) матрицей назовем матрицу вида

$$L = L(a,b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Будем обозначать $b_{n+1} = b_i,\ a_{n+i} = a_i$.

Пространство всех матриц вида (3.1) имеющих фиксированный спектр

$$\lambda = (\lambda_1 < \cdots < \lambda_n),$$

будем обозначать $PTD_{n,\lambda}$. Рассмотрим топологию этого пространства. Для этого разобьем $PTD_{n,\lambda}$ на замкнутые куски, в зависимости от знаков внедиагональных элементов b_i. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in Z_2^n, \varepsilon_i = \pm 1$, вектор знаков.

Рассмотрим подмножество

$$PTD^{\varepsilon}_{n,\lambda} = \{L(a,b) \in PTD_{n,\lambda} \mid sgn(b_i) \in \varepsilon_i, 0\}$$

(то есть допускаются нестрогие неравенства на элементы b_i).

Теорема 3.1. (Ван Мёрбеке) [2] Образ отображения $p_+ : PTD^{+}_{n,\lambda} \to R_{\geqslant 0}$ является отрезком $\left[0, \dfrac{m}{4}\right]$. Для любого $t \in \left(0, \dfrac{m}{4}\right)$ множество $p_+^{-1}(t)$ есть $(n-1)$-мерный тор, а $p_+^{-1}\left(\dfrac{m}{4}\right)$ есть тор размерности $n-1-n_-$.

Аналогично, образом отображения $p_- : PTD^{+}_{n,\lambda} \to R_{\leq}$ является отрезок $\left[-\dfrac{M}{4}, 0\right]$. Для любого $t \in \left(-\dfrac{M}{4}, 0\right)$ множество $p_-^{-1}(t)$ есть $(n-1)$-мерный тор, а $p_-^{-1}\left(-\dfrac{M}{4}\right)$ есть тор размерности $n-1-n_+$.

Теорема Ван Мёрбеке гласит, что отображение p_+ расслаивает $PTD^{+}_{n,\lambda}$ на семейство торов T^{n-1}, причем над крайней правой точкой у тора стягивается в точку n_- координатных окружностей. Рассмотрим крайнюю левую точку отрезка. Вспомним, что p_+ сопоставляет периодической трехдиагональной матрице произведение её внедиагональных элементов. Значит

$$p_+^{-1}(0) = \left\{ L(a,b) \in PTD^{+}_{n,\lambda} \mid \prod_{i=1}^{n} b_i = 0 \right\}.$$

Заключение. В заключение хотелось бы подчеркнуть, что изучение пространств матриц и пермутоэдров является важным и актуальным направлением исследований. Результаты данной работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях в различных областях науки и техники, в том числе в математике, физике, компьютерных науках и многих других областях.

[2] P. van Moerbeke, The Spectrum of Jacobi Matrices, Inventiones math. 37 (1976), 45-81.