МИНОБРНАУКИ
РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Простые тайлы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Рустамова Дмитрий Романовича

Научный руководитель
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Саратов 2023

Введение. Самоподобные аттракторы и тайлы являются интересными и важными объектами в математике, физике, химии, биологии и других науках. Они возникают как модели сложных динамических систем, обладающих свойствами самоорганизации, хаоса, фрактальности и масштабной инвариантности. Изучение их свойств, структуры, классификации и приложений представляет собой актуальную и перспективную область научных исследований. Например приложение в теории функций, теории обработки сигналов, комбинаторике и теории приближений (см. [1]-[2])

Самоподобный аттрактор в пространстве $\mathbb{R}^d$ — это компактное множество A, которое является неподвижной точкой отображения $\mathcal{F}$. Если матрица и векторы сдвигов являются целочисленными, то аттрактор называется целочисленным. Если к тому же аттрактор имеет единичную меру Лебега, то он называется тайлом.

Тайлы обладают рядом замечательных свойств: они являются самоподобными множествами с целочисленной структурой; они покрывают пространство без перекрытий или дыр; они порождают ортонормированные системы Хаара в $\mathbb{R}^d$; они связаны с задачами приближения функций и интерполяции данных; они имеют геометрический и алгебраический интерес как обобщения многомерных чисел. Практическая важность объясняется не только простотой построения соответствующих функций Хаара, но и тем, что эти функции обладают максимальным показателем гладкости из всех возможных базисов Хаара в $\mathbb{R}^d$. Гладкость тайла (Вопрос гладкости изучался в [3]) влечет быструю сходимость частичных сумм разложения по соответствующему базису, что также важно на практике.

Задачами данной работы являются:

►Рассмотрение приводимых тайлов и аттракторов

►Классификация бокс-аттракторов

►Рассмотрение системы бокс-Хаара

►Классификация плоских аттракторов-многоугольников

►Классификация выпуклых аттракторов

►Классификация аттракторов на прямой

Основное содержание работы. Тайлом в $\mathbb{R}^d$ называется множество точек вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M^{-k} b_k$ меры 1, где M – целочисленная матрица, все собственные значения которой по модулю больше 1 (растягивающая матрица), а все b_k взяты из конечного множества $\mathbb{Z}^d$. Множество цифр содержит $|detM|$ элементов – по одному элементу из каждого класса смежности $\mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$.

Тайл является компактом, целые сдвиги которого покрывают все пространство в один слой. В определенном смысле тайл – это многомерное обобщение отрезка [0, 1] для пространства $\mathbb{R}^d$. Обобщением тайла является понятие аттрактора. Для аттрактора M – произвольная растягивающая матрица (не обязательно целочисленная), а цифры b_k – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$. Аттрактор обладает свойством самоподобия: $H = \bigcup\limits_{s_k} M^{-1}(G + s_k)$, где s_k это сдвиг, а множества $M^{-1}(G + s_k)$ имеют меру пересечения нуль. Так как тайл является аттрактором, то тайл - это самоподобное множество, целые сдвиги которого заполняют пространство без перекрытий.

Определение 1. Пусть зафиксированы растягивающая матрица $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ и набор цифр $D(M) = \{d_i : i = 0, \cdots, m-1\}$. Если мера множества $G = \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} M^{-k} d_{n_k} : d_{n_k} \in D(M)\}$ равна 1 (т.е. $\mathbb{R}^d$ покрывается целочисленными сдвигами множества G в один слой), то множество G называется тайлом.

Определение 2. Если для непустого компактного множества G существуют растягивающая матрица $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ и набор векторов $S(M) \subset \mathbb{R}^d$, такие что $G = \bigcup\limits_{s \in S(M)} M^{-1}(G + s)$, где множества $M^{-1}(G + s)$ попарно имеют меру пересечения нуль, то множество называется аттрактором.

Определение 4. Пусть зафиксированы аттрактор G_1 с матрицей M_1 и набором сдвигов S_1 в $\mathbb{R}^{d_1}$ и аттрактор G_2 с матрицей M_2 и набором сдвигов S_2 в $\mathbb{R}^{d_2}$. Тогда прямым произведением аттракторов G_1 и G_2 называется множество $G_1 \times G_2$.

В дальнейшем к множеству G будут применены более слабые требования. Будет требоваться существование растягивающей матрицы $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ (не обязательно целой) и набор векторов S(M) из $\mathbb{R}^d$, такие что выполняется свойство 2).

Предложение 5.

1) Множество $G_1 \times G_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ является аттрактором для блочно-диагональной матрицы M, составленной из блоков M_1 и M_2, и набора сдвигов $S_1 \times S_2$.
2) Если оба множества G_1 и G_2 – это тайлы, то их произведение как аттракторов также будет тайлом.

Определение 6. Аттрактор называется неприводмимым, если он не является прямым произведением других аттракторов.

Исследуем, как устроены «простые» аттракторы, которые являются параллелепипедами (любыми, а не только прямоугольными). Будем называть такие множества бокс-аттракторами. Если аттрактор при этом является тайлом, то будем называть его бокс-тайлом.

Ясно, что любой аттрактор раскладывается в произведение каких-то неприводимых аттракторов.

Теорема 7. Любой бокс-аттрактор является в некотором базисе прямым произведением неприводимых бокс-аттракторов; любой бокс-тайл в некотором базисе является прямым произведением неприводимых бокс-тайлов.

Теорема 8. Пусть зафиксирована растягивающая матрица $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1) Существует неприводимый бокс-аттрактор, построенный по этой матрице и какому-то набору целых сдвигов.
2) В некотором базисе над $\mathbb{Z}^d$ матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} \\ \pm p_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где p_i - натуральные числа. При этом произведение всех p_i по модулю равно определителю исходной матрицы.

С использованием любого тайла в $\mathbb{R}^d$ можно построить базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Построение классической одномерной системы Хаара на отрезке

[0, 1]; она строится по уровням. Сначала определяется функция

$$h_0(x) = \chi[0, 1).$$

Затем функции уровня j строятся по общей формуле

$$h_{2^j+k}(t) = \begin{cases} (\sqrt{2})^j, & t \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j}\right), \\ -(\sqrt{2})^j, & t \in \left[\frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right), \qquad k = 0, \cdots, 2^j - 1. \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

Определение 14. Назовем бокс-Хааром многомерную систему Хаара, порожденную бокс-тайлом.

Определение 15. Назовем сторону многоугольника крайней, если прямая, содержащая эту сторону, не пересекает внутренность многоугольника. Будем называть сопряженными к крайней стороне многоугольника те его стороны, которые лежат с ней на одной прямой.

Теорема 16. Любой многоугольник G на плоскости $\mathbb{R}^2$, являющийся аттрактором, – это параллелограмм.

Лемма 17. Если многоугольник G – аттрактор, то верно хотя бы одно из следующих двух утверждений.

1) Преобразование $M_1^{-1} = M^{-N}$ является гомотетией с положительным коэффициентом.
2) Все стороны многоугольника G параллельны всего двум прямым. В системе координат с осями, параллельными этим прямым, M_1^{-1} представляется диагональной матрицей с положительными элементами на диагонали.

Теорема 19. Любой выпуклый аттрактор G в $\mathbb{R}^d$ является параллелепипедом.

Замечание 20. Из того что все грани G – параллелепипеды, еще не следует, что G является параллелепипедом. Контрпример дает ромбододекаэдр.

Лемма 21. Множество W, состоящее из конечного числа отрезков с целочисленными концами, является аттрактором тогда и только тогда, когда некоторое конечное число неперекрывающихся сдвигов множества W в точности заполняет некоторый отрезок.

Доказательство. Предположим, такие сдвиги существуют и заполняют отрезок длины h, а множество W состоит из отрезков $I_1, I_2, \cdots, I_n$ с целыми длинами. Тогда сдвигами множества W/h можно покрыть отрезок длины 1, поэтому можно покрыть и все отрезки $I_1, I_2, \cdots, I_n$, т.е. замостить множество W его сжатыми в h раз копиями. Наоборот, для аттрактора (уже не обязательно с целочисленными концами) можно измельчить его разбиение до достаточно малого так, чтобы каждое сжатое множество содержалось полностью в каком-то из отрезков исходного множества. Тогда неперекрывающимися сжатыми множествами можно заполнить, к примеру, первый отрезок множества W. Растянув сжатые аттракторы до размеров исходного, получим замощение отрезка с помощью сдвигов исходного множества.

Лемма 22. Если W – аттрактор из конечного числа отрезков, то все его отрезки имеют одну и ту же длину, а расстояния между ними кратны этой длине.

Доказательство. Как теперь известно из доказательства леммы 21, некоторые неперекрывающиеся сдвиги множества W покрывают отрезок. Можно считать, что все сдвиги положительны, т.е. осуществляют сдвиг вправо. Сжав или растянув при необходимости картинку, можно считать, что длина самого левого отрезка I_1 у W равна 1. Если это единственный отрезок у W, то утверждение доказано. Иначе, чтобы заполнить место сразу после отрезка I_1, нужно иметь среди сдвигов сдвиг на 1. Отметим, что длины всех сдвигов тогда не меньше 1, иначе отрезок I_1 будет пересекать свою сдвинутую версию. а) Длины всех отрезков W не больше 1, иначе при сдвиге на 1 получим самопересечение у отрезка с длиной больше 1. б) Длины всех отрезков W не меньше 1. В самом деле, пусть это неверно; найдем самый левый отрезок J с длиной $a < 1$. Тогда после сдвига на 1 образуется дырка длины 1 - a, которую нужно заполнить. Слева от этой дырки есть только один отрезок длины меньше 1, который может в нее полностью поместиться, – это отрезок J. Но при этом J сдвинется меньше, чем на 1; противоречие с тем, что длины всех сдвигов не меньше 1. в) Все промежутки между отрезками

W должны заполняться неперекрывающимися отрезками длины 1, поэтому все эти промежутки, очевидно, имеют целую длину.

Определение 24. Допустимым множеством W будем называть конечное множество хотя бы из двух целых отрезков длины 1 на прямой, включающее 0, для которого существует такое множество векторов-сдвигов $L \ni 0$, что сдвиги W на векторы из L не перекрываются и заполняют отрезок на прямой.

Определение 26. Множество целых чисел Q назовем l-множеством, если в нем конечное число отрезков (подряд идущих целых чисел), начало каждого отрезка (первое число в последовательности подряд идущих) делится на l, а длины отрезков (количество подряд идущих чисел в блоках) равны l.

Теорема 27. Пусть $W \subset \mathbb{R}$ – допустимый аттрактор. Докажем, что для любого $k \in \mathbb{Z} \geq 0$ верно следующее:

1) начала всех отрезков в W, не превосходящие k, делятся на l;
2) $L \cap \{0, 1, \cdots, k, k + 1\}$ – это какое-то l-множество, пересеченное с $\{0, 1, \cdots, k, k+1\}$.

Лемма 28. В рамках теоремы 27

$$\{\triangle + 1, \cdots, \triangle + l - 1\} \cap \{0, \cdots, k+1\} \subset L \cap \{0, \cdots, k+1\}.$$

Определение 29. Пусть $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $\mathrm{B} = \{b_1, \cdots, b_k\}$ и для любых несовпадающих пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ выполняется $a_{i_1} + b_{j_1} \neq a_{i_2} + b_{j_2}$. Тогда будем называть суммой множеств A и B множество

$$A \oplus B = \{a_i + b + j | i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, k\}.$$

Лемма 30. Если $A \oplus B = A \oplus C$, то $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Доказательство. Пусть

$$A = \{a_1, \cdots, a_n\}, \quad a_1 < \cdots < a_n,$$
$$B = \{b_1, \cdots, b_k\}, \quad b_1 < \cdots < b_k,$$
$$C = \{c_1, \cdots, c_m\}, \quad c_1 < \cdots < c_m.$$

Предположим, что утверждение леммы неверно, пусть

$$b_1 = c_1, \quad \cdots, \quad b_p = c_p, \quad b_{p+1} \neq c_{p+1}, \qquad p < k, \quad p < m$$

Сумма множеств прямая, поэтому минимальный элемент в $A \oplus B$ $\{a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_p\}$ равен $a_1 + b_{p+1}$, в $A \oplus C$ $\{a_1 + c_1, \cdots, a_n + c_p\}$ равен $a_1 + c_{p+1}$. Эти множества равны, поэтому $b_{p+1} = c_{p+1}$; противоречие.

Теорема 31. Пусть Y является аттрактором в $\mathbb{Z}$ с длиной отрезков (подряд идущих целых чисел в Y), равной s. Тогда Y можно представить как сумму нескольких арифметических прогрессий. Можно выбрать это представление так, чтобы одно из слагаемых равнялось прогрессии $\{0, \cdots, s-1\}$.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по h – минимальному числу сдвигов Y, которые необходимо сделать, чтобы заполнить отрезок целых чисел полностью.

База: если h = 0, то у нас уже есть отрезок длины s, который сам является арифметической прогрессией нужного вида.

Шаг: пусть утверждение доказано для всех $h_1 < h$, докажем его для h.

Если длина отрезков $s \neq 1$, то представим Y в виде $Y_0 \oplus \{0, \cdots, s-1\}$, где у Y_0 длина всех отрезков 1 (взяв в качестве Y_0 начала отрезков в Y). Это представление в виде прямой суммы корректно, поскольку расстояния между точками Y_0 равно хотя бы s, и если $y_1, y_2 \in Y_0, y_1 < y_2, s_1, s_2 \in \{0, \cdots, s-1\}$, то $y_1 + s_1 < y_2 + s_2$. Множество Y_0 – также аттрактор, пусть l_0 – расстояние между первыми двумя его точками. Осталось доказать, что Y_0 представимо в виде суммы арифметических прогрессий. Применим теорему 27 для Y_0 с очень большим k (например, больше величины максимального сдвига). Получим, что множество всех сдвигов L_0 является l-множеством, где в роли l выступает L_0. Из определения l-множества следует, что $L_0 = \{0, 1, \cdots, l_0 - 1\} \oplus L_1$, где L_1 – множество начал отрезков в L_0. Поскольку L_0 – множество сдвигов, то $Y_0 \oplus L_0$ – отрезок целых чисел. Получаем, что $Y_0 \oplus \{0, 1, \cdots, l_0 - 1\} \oplus L_1$– отрезок целых чисел.

Рассмотрим $Y_1 = Y_0 \oplus \{0, 1, \cdots, l_0 - 1\}$ – корректно определенное множество, состоящее из нескольких отрезков целых чисел. Оно является аттрактором, так как $Y_1 \oplus L_1$ – отрезок целых чисел, т.е. смогли замостить отрезок целых чисел, сдвигая Y_1 с помощью L_1. Поскольку все расстояния между точками в Y_0 делятся на L_0, то длина первого отрезка в Y_1 делится на L_0 (первый отрезок в Y_1 склеивается из нескольких отрезков длины L_0), пусть эта длина равна p $\cdot$ L_0. В L_1 элементов в L_0 раз меньше, чем в L_0, а в L_0 элементов в s раз больше, чем в множестве сдвигов, соответствующих Y. Поскольку L_0 как расстояние между первыми точками Y_0 строго больше s, то в L_1 элементов строго меньше h, поэтому для аттрактора Y_1 применимо предположение индукции. Тогда Y_1 представляется как сумма арифметических прогрессий, одна из которых – это $\{0, 1, \cdots, p \cdot l_0 - 1\}$.

Заметим, что

$$\{0, 1, \cdots, p \cdot l_0 - 1\} = \{0, 1, \cdots, l_0 - 1\} \oplus \{0, l_0, 2 \cdot l_0, \cdots, (p-1) \cdot l_0\}.$$

Получаем, что Y_1 представляется как сумма арифметических прогрессий, одна из которых – это $0, 1, \cdots, l_0 - 1$. По построению $Y_1 = Y_0 \oplus 0, 1, \cdots, l_0 - 1$, значит, по лемме о прямой сумме множеств получаем, что Y_0 является суммой арифметических прогрессий, что и требовалось получить.

Если Y – аттрактор, а L – множество сдвигов, то $Y \oplus L$ – отрезок целых чисел. Поэтому можно считать, что L – аттрактор, а Y – множество сдвигов. Значит, L также является суммой арифметических прогрессий. Общая сумма арифметических прогрессий дает отрезок целых чисел. Наша задача эквивалентна вопросу о том, при каких $a_1, d_1, \cdots, a_n, d_n$ существует N такое, что

$$1 + z + \cdots + z^N = (1 + z^{a_1} + \cdots + z^{a_1 \cdot (d_1 - 1)}) \cdots (1 + z^{a_n} + \cdots + z^{a_n \cdot (d_n - 1)}).$$

После этого сумму произвольного подмножества набора прогрессий можно взять в качестве аттрактора, а сумма оставшихся будет множеством сдвигов. Обозначим $P_d(z) = 1 + z + \cdots + z^{d-1}$

Лемма 32. В предыдущих обозначения справедливо

$$P_{d_1 \cdots d_n}(z) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2}(z^{d_1}) \cdot P_{d_3}(z^{d_1 \cdot d_2}) \cdots P_{d_n}(z^{d_1 \cdots d_{n-1}}).$$

Доказательство. Докажем по индукции по k, что

$$P_{d_1\cdots d_k}(z) = P_{d_1}(z)\cdot P_{d_2}(z^{d_1})\cdots P_{d_k}(z^{d_1\cdots d_{k-1}}).$$

База: случай k $= 1$ очевиден; k $= 2$ следует из явной проверки

$$(1+z+\cdots+z^{d_1\cdot d_2-1}) = (1+z+\cdots+z^{d_1-1})\cdot(1+z^{d_1}+\cdots+z^{d_1\cdot(d_2-1)}).$$

Шаг: пусть утверждение доказано для k > 1, докажем для k $+ 1$:

$$\begin{aligned} P_{d_1\cdots d_{k+1}}(z) &= P_{d_1}(z)\cdot P_{d_2\cdots d_{k+1}}(z^{d_1}) \\ &= P_{d_1}(z)\cdot P_{d_2}(z^{d_1})\cdots P_{d_{k+1}}(z^{d_1\cdots d_k}). \end{aligned}$$

Теорема 33. Пусть $a_1 \le \cdots \le a_n$. Тогда

$$1+z+\cdots+z^N = (1+z^{a_1}+\cdots+z^{a_1\cdot(d_1-1)})\cdots(1+z^{a_n}+\cdots+z^{a_n\cdot(d_n-1)})$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = 1, \ldots, a_k = d_1\cdots d_{k-1}$ для любого $k, 2 \le k \le n, N = d_1\cdots d_n$.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 32.

Для доказательства необходимости воспользуемся индукцией. Равенство $a_1 = 1$ следует из того, что слева есть слагаемое z, значит, оно должно получаться справа, что невозможно, если все входящие степени z больше 1. Пусть уже доказано, что $a_1 = 1, a_i = d_1\cdots d_{i-1}$ для любого $k, 2 \le i \le k$; докажем это для k $+ 1$. По предположению индукции

$$\begin{aligned} 1+z+\cdots+z^N &= P_{d_1}(z)\cdots P_{d_k}(z^{d_1\cdots d_{k-1}}) \\ &\quad\times(1+z^{a_{k+1}}+\cdots+z^{a_{k+1}\cdot(d_{k+1}-1)})\cdots(1+z^{a_n}+\cdots+z^{a_n\cdot(d_n-1)})) \\ &= P_{d_1\cdots d_k}(z)\cdot(1+z^{a_{k+1}}+\cdots+z^{a_{k+1}\cdot(d_{k+1}-1)})\cdots(1+z^{a_n}+\cdots+z^{a_n\cdot(d_n-1)}). \end{aligned}$$

Если $k \ne n$, т.е. разложение еще не закончено, то слева есть слагаемое $z^{d_1\cdots d_k}$. Справа не сможем его получить, если из всех множителей, кроме первого, выбрать слагаемые, равные 1. Значит, суммарная степень y и z будет не меньше a_{k+1}, тогда $a_{k+1} \le d_1\cdots d_k$. При этом в правой сумме все слагаемые вида

z^s, где $s < d_1 \cdots d_k$, получаются с помощью произведения первой скобки и нескольких 1, поэтому они не должны получаться справа еще каким-то способом, а значит, $a_{k+1} \geq d_1 \cdots d_k$.

Получаем, $a_{k+1} = d_1 \cdots d_k$, как и требовалось. Формула для N при этом следует из леммы 32, так как

$$P_N(z) = 1 + z + \cdots + z^{N-1} = P_{d_1}(z) \cdots P_{d_n}(z^{d1 \cdots d_{n-1}}) = P_{d_1 \cdots d_n}(z).$$

Заключение. В представленной бакалаврской работе были классифицированы тайлы, как частные случаи аттракторов. Приведены примеры тайлов на плоскости и схематическое представление замощения ими.

На языке Python написана программа, которая использует набор аксиом и набор правил для замощения плоскости. Для конкретного примера реализации используется тайл дракон в приложении А.