

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Особенности динамики мемристивного нейрона ФитцХью-Нагумо**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

Студента 4 курса 4032 группы  
направления 03.03.03 Радиофизика  
Института физики  
Федюкова Данилы Эльдаровича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой радиофизики  
и нелинейной динамики,  
д.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Г.И. Стрелкова

Саратов 2023 г.

## Введение

В последние годы появилось много работ, в которых исследуются модели мемристивных нейронов и сетей из таких нейронов. В [1] впервые была представлена мемристивная модель нейрона Хиндмарш-Роуза (ХР), использующая мемристор, управляемый магнитом, для описания эффекта электромагнитного излучения. Добавление мемристоров к традиционным моделям нейронов породило новую концепцию в нейродинамике, известную как модели мемристивных нейронов и нейронных сетей.

Эксперименты показывают, что мемристоры могут имитировать цепочки обратных связей в нейронах (так называемые аутапсы). Для построения новой модели мемристивного нейрона на основе уже имеющейся модели в качестве аутапса выбирается управляемый магнитным потоком мемристор. Добавление мемристора в традиционные модели нейронов и нейронных сетей может вызвать сложную динамику, которая в настоящее время привлекает внимание различных исследователей со всего мира.

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию динамики мемристивных нейронов, можно отметить, что детальный анализ особенностей, к которым приводит добавленная в систему мемристивная обратная связь в большинстве случаев отсутствует. Не рассматривается наличие или отсутствие линий, или поверхностей равновесий, которые могут возникать в системах с идеальными мемристорами (мемристорами, обладающими бесконечно долгой памятью) [2-5], явление экстремальной мультистабильности не связывается с существованием таких многообразий, не проводится достаточно полный бифуркационный анализ системы.

В рамках выпускной квалификационной работы исследуется одна из простейших моделей нейрона – нейрон ФитцХью-Нагумо (ФХН), в которую добавлена мемристивная обратная связь, моделирующая аутапс. Несмотря на простоту модели ФХН, мемристивный нейрон ФХН почти не рассмотрен в литературе, а в той форме записи уравнений, в которой нейрон ФХН исследуется в работе, он ранее не рассматривался.

**Целью выпускной квалификационной работы** является выявление особенностей динамики нейрона ФитцХью-Нагумо, к которой приводит учет в модели нейрона мемристивной обратной связи. В соответствии с поставленной целью решаются следующие задачи:

1. Аналитическое исследование состояний равновесия системы при идеальном характере мемристора и при учете конечного времени памяти мемристора. Определение условий существования линии равновесий;
2. Численное исследование колебательного режима в мемристивном нейроне ФХН при идеальном и неидеальном характере мемристора, построение области существования колебаний на плоскости различных параметров системы;
3. выявление зависимости динамики системы от начального состояния мемристора и анализ предельных множеств в фазовом пространстве системы.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, три главы (1. Исследуемая система; 2. Динамика мемристивного осциллятора (1) с идеальным мемристором; 3. Динамика мемристивного осциллятора с неидеальным мемристором ( $k_2 \neq 0$ )), выводы и список использованных источников. Общий объем работы 43 стр.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Осциллятор ФитцХью-Нагумо с мемристивной проводимостью (мемристивный нейрон ФХН) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= x - \frac{1}{3} x^3 - y - kx(1 + \mu z^2), & \frac{dy}{dt} &= \gamma x - y + \beta, \\ \frac{dz}{dt} &= k_1 x - k_2 z, \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x$  и  $y$  – безразмерные переменные, время  $t$  также является безразмерным. Модель описывает регенеративное самовозбуждение напряжения на клеточной мембране (безразмерная переменная  $x$ ) в результате нелинейной положительной обратной связи, а также «восстановление» в результате линейной отрицательной обратной связи по току (безразмерная переменная  $y$ ). Безразмерные параметры  $\gamma$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  управляют динамикой осциллятора, причем параметр  $\varepsilon$  обычно полагается малым. В зависимости от значений параметров осциллятор (1) может находиться в трех различных динамических режимах: автоколебательном, возбудимом и бистабильном. В уравнения осциллятора ФХН добавлена цепочка с мемристивной проводимостью, управляемой магнитным потоком (переменная  $z$ ). Зависимость магнитного потока от напряжения мембраны  $x$  описывается третьим уравнением системы (1). Параметр  $k_I$  характеризует скорость «забывания» мемристора. При  $k_I = 0$  мемристор является идеальным (с бесконечно долгой памятью). Следующие параметры были фиксированными в процессе исследований:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_I = 1$ ;  $\mu = 40$ .

### **Динамика системы (1) в отсутствии мемристивной обратной связи**

Прежде, чем обратиться к динамике мемристивного нейрона (1), рассмотрим режимы «обычного» нейрона ФХН, положив  $k = 0$  (отсутствие мемристивной обратной связи) при изменении  $\beta, \gamma$  [6]. Диаграмма осциллятора (1) на плоскости управляющих параметров  $\beta, \gamma$  без влияния мемристора приведена на рис.1. На диаграмме выделены три области: область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (затонированная область I); область автоколебаний (затонированная область II); область с единственным аттрактором - устойчивой точкой равновесия (III). Вблизи порога автоколебаний наблюдается возбудимый режим, для которого характерно возникновение спайков активности при внешнем воздействии на осциллятор, превышающем некоторый порог возбуждения.

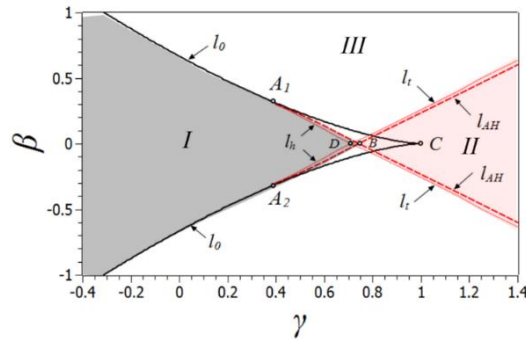


Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма осциллятора (1) на плоскости управляющих параметров  $\beta$ ,  $\gamma$ . На диаграмме обозначены следующие области и бифуркационные линии: *I* – область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (серая тонировка); *II* – область автоколебаний (светло-серая тонировка); *III* – область с единственным аттрактором, которым является одна устойчивая точка равновесия.  $l_0$ - линия касательной бифуркации равновесий;  $l_{AH}$  - линия субкритической бифуркации Андронова-Хопфа;  $l_t$  - линия касательной бифуркации циклов;  $l_h$  - линии гомоклинической бифуркации.

В зависимости от значений параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  в системе (1) имеется одна или три точки равновесия. Сплошные жирные линии  $l_0$  на диаграмме соответствуют бифуркации складки (касательной бифуркации точек равновесия). Их легко рассчитать аналитически: в точках складки параметры удовлетворяют соотношению:

$$\beta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(1-\gamma)}{3\alpha}} (1-\gamma).$$

Точка *C* является точкой сборки. С учетом значения  $\alpha = 1/3$ , имеем

$$\beta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{1-\gamma} (1-\gamma).$$

Расположение этих линий не зависит от параметра  $\varepsilon$ .

Одна из точек равновесия, участвующих в бифуркации складки, всегда является седлом, а другая может быть, как устойчивой, так и неустойчивой. Слева от точек  $A_1, A_2$  линии складки  $l_0$  соответствуют седло-узловой бифуркации, а справа – седло-репеллерной. При малых значениях  $\beta$  осциллятор ФХН является бистабильным и обладает двумя устойчивыми точками равновесия. В некотором интервале значений параметра  $\gamma$  с ростом  $|\beta|$  одна из устойчивых точек теряет устойчивость в результате субкритической бифуркации Андронова-Хопфа на линиях  $l_{AH}$ , отмеченных на диаграмме пунктиром. Таким образом, границами области бистабильности  $I$  служат участки линий складки  $l_0$  (слева от точек  $A_1, A_2$ ) и участки линий субкритической бифуркации Андронова-Хопфа  $l_{AH}$  от точек  $A_1, A_2$  до точки  $B$ .

У порога возникновения генерации (вблизи границ области  $II$ ) осциллятор (1) демонстрирует возбудимое поведение. Свойство возбудимости наиболее отчетливо проявляется при сильно релаксационном характере системы, когда параметр  $\varepsilon$  мал ( $\varepsilon \ll 1$ ). Причем, следует отметить, что черты возбудимой динамики характерны для системы (1), как в области  $III$ , где существует единственная устойчивая точка равновесия, так и в области бистабильности  $I$ .

### **Динамика мемристивного осциллятора (1) с идеальным мемристором ( $k_2=0$ )**

Рассмотрим системы (1) при  $k > 0$ , т.е. в присутствии мемристивной обратной связи. Будем считать мемристор идеальным, т.е. положим  $k_2 = 0$ . Можно выделить особый случай, когда параметр  $\beta$  равен нулю.

#### **Случай $\beta = 0$**

В этом случае из анализа точек равновесия системы (1) следует, что любая точка с координатами  $x_p = 0, y_p = 0, z_p$  – любое вещественное число является точкой равновесия. Т.е. в системе существует линия равновесий, совпадающая с осью  $OZ$ . Существование линий (или поверхностей) равновесий является характерной особенностью систем с идеальными мемристорами.

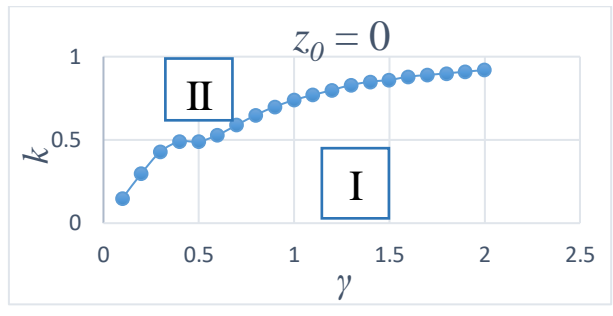


Рисунок 2 – Граница области периодических колебаний (I) и устойчивого равновесия (II) на плоскости  $\gamma, k$ , построенная при начальных условиях  $x_0 = 0.2, y_0 = 0.1$  и различных значениях  $z_0$ , в случае идеального мемристора  $k_2 = 0$  и значения  $\beta = 0$ . Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01; k_1 = 1; \mu = 40$ .

На Рис.3 приведены границы между областью колебаний и областью устойчивого равновесия на плоскости  $z_0, k$ , полученные при фиксированном значении параметра  $\gamma = 1.0$  и разных начальных значениях переменных  $x$  и  $y$ .

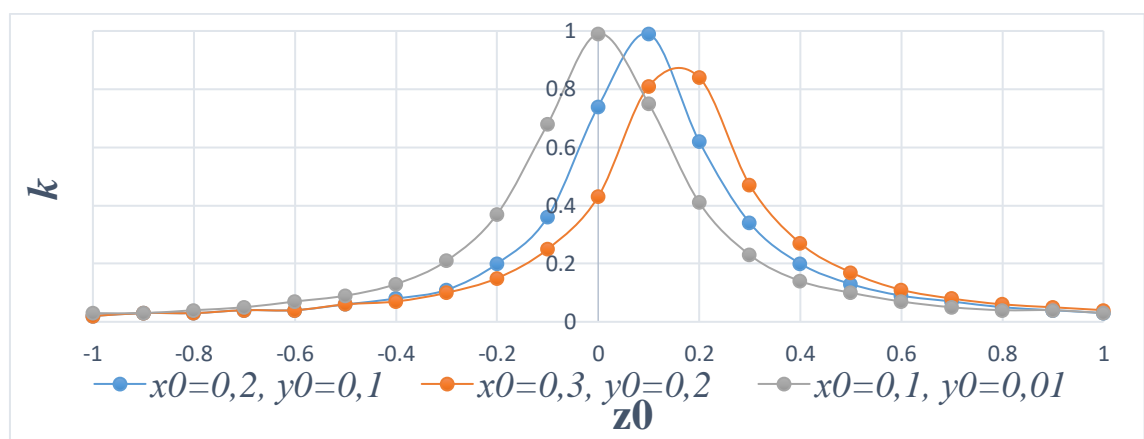


Рисунок 3 – Границы между областью колебаний I и областью устойчивого равновесия II на плоскости  $z_0, k$ , полученные при фиксированном значении параметра  $\gamma = 1.0$  и разных начальных значениях переменных  $x$  и  $y$  в случае идеального мемристора  $k_2 = 0$  и значения  $\beta = 0$ . Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01; k_1 = 1; \mu = 40$ .

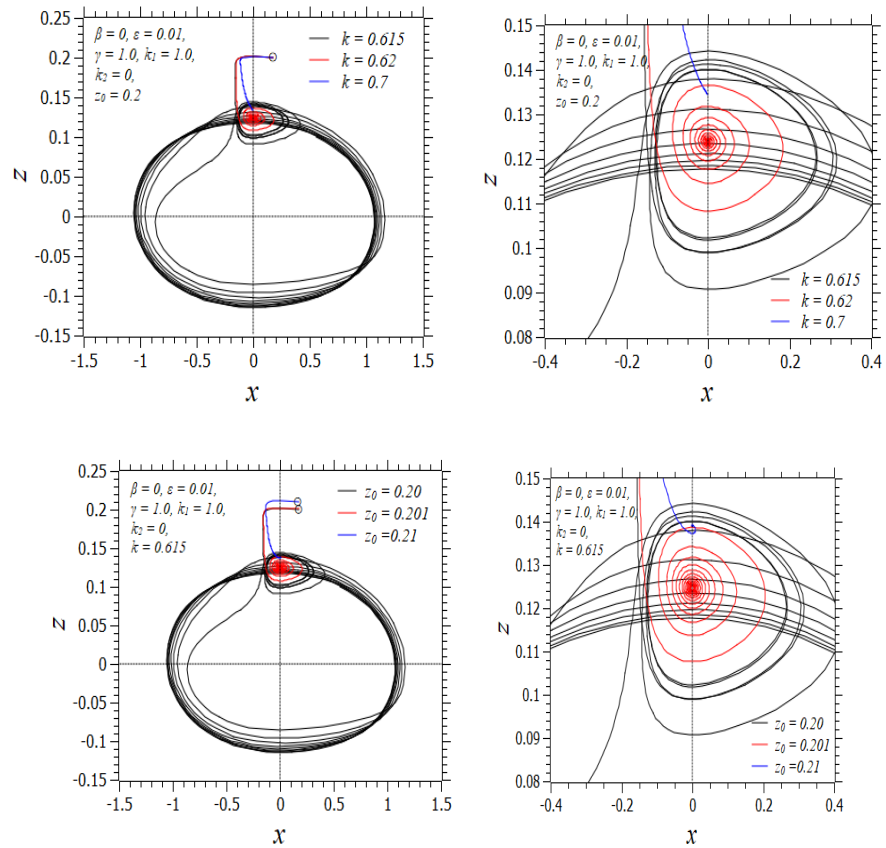


Рисунок 4 – Поведение фазовых траекторий в системе (1) с идеальным мемристором при  $\beta = 0$  с изменением параметра связи при  $z_0 = 0.2$  (а) и с изменением  $z_0$  при  $k = 0.615$  (б). Графики, приведенные справа, являются увеличенными фрагментами соответствующих фазовых портретов.

Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ;  $y_0 = 0.1$ .

Поведение фазовых траекторий, при изменении параметра связи и при изменении  $z_0$ .

### Случай $\beta \neq 0$

При  $\beta \neq 0$  у системы (1) нет точек равновесия:



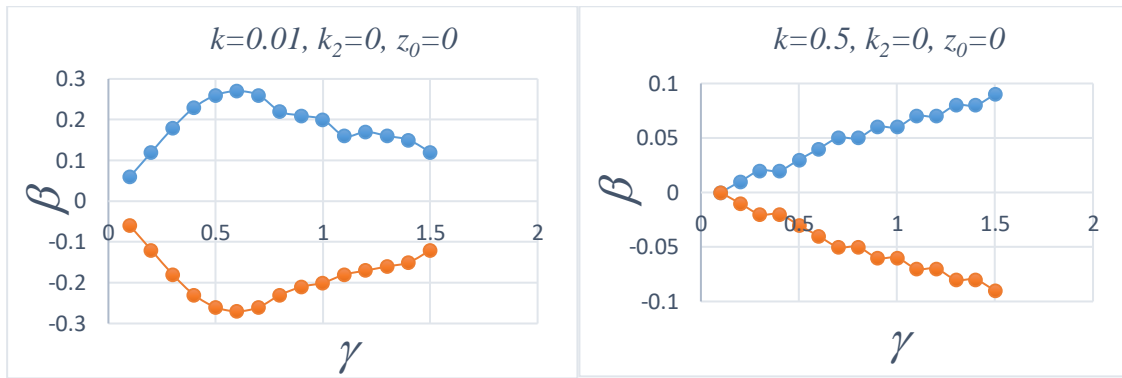


Рисунок 5 – Область колебаний I на плоскости параметров  $\gamma, \beta$  при  $k = 0.01$  (а) и  $k = 0.5$  (б). Слева – границы области колебаний, построенные при  $z_0 = 0$  справа – при  $z_0 = 1.0$ . Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\mu = 40$ . Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ .

Из Рис.5 видно, что автоколебания наблюдаются уже при значениях  $\gamma$ , близких к нулю, а границы области автоколебаний не связаны с бифуркацией Андронова-Хопфа, как это имеет место в нейроне без мемристора. Вне области синхронизации нет устойчивой точки равновесия. Таким образом в мемристивной нейроне ФХН отсутствует режим возбуждения.

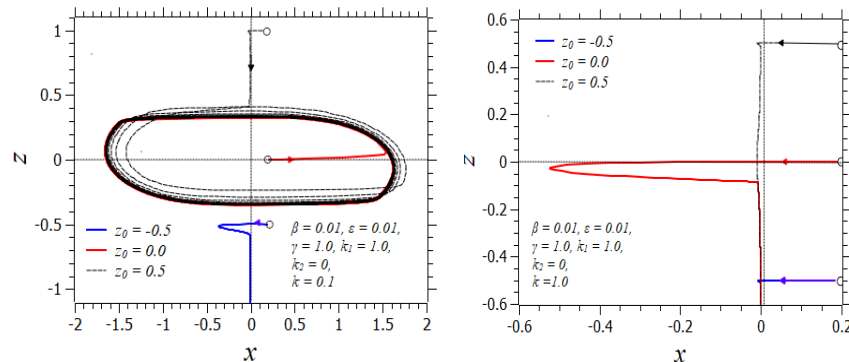


Рисунок 6 – Фазовые траектории, полученные при различных начальных значениях мемристивной переменной  $z_0$  в случае  $k = 0.1$  (а) и  $k = 1.0$  (б). Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\mu = 40$ . Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ .

Фазовые траектории, полученные при различных начальных значениях мемристивной переменной  $z_0$ .

## Динамика мемристивного осциллятора с неидеальным мемристором

$$(k_2 \neq 0)$$

При отличном от нуля значении параметра «забывания» мемристора  $k_2$  из анализа системы (1) получаем следующую систему уравнений для координат точек равновесия:

$$F(x_p) = \left( \frac{1}{3} + k\mu \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) x_p^3 + (\gamma + k - 1)x_p + \beta = 0,$$

$$y_p = \gamma x_p + \beta, \quad z_p = \frac{k_1}{k_2} x_p. \quad (2)$$

Возможны три точки равновесия или одна, в зависимости от параметров.

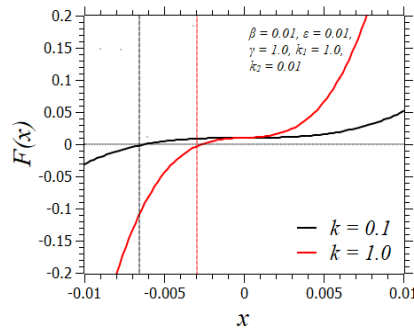


Рисунок 7 – Вид функции  $F(x)$  при  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\mu = 40$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.01$ , построенные для двух значений параметра  $k$ :  $k = 0.1$  (черная кривая) и  $k = 1$  (красная кривая). Вертикальными линиями отмечены точки пересечения нуля. Вид функции  $F(x)$  при  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\mu = 40$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.01$ , построенные для двух значений параметра  $k$ :  $k = 0.1$  (черная кривая) и  $k = 1$  (красная кривая). Вертикальными линиями отмечены точки пересечения нуля.

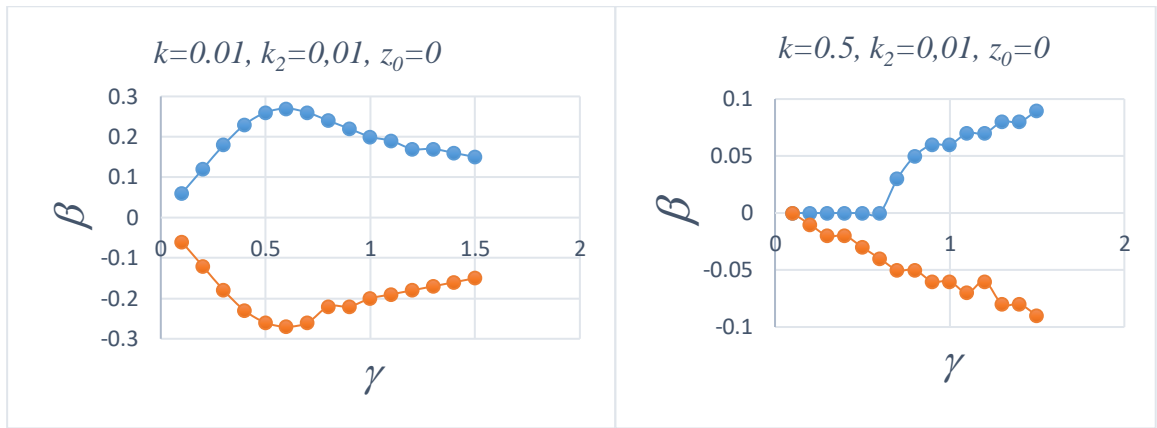


Рисунок 8 – Область колебаний на плоскости параметров  $\gamma, \beta$  при  $k = 0.01$  (а) и  $k = 0.5$  (б). Слева – границы области колебаний, построенные при  $z_0 = 0$  справа – при  $z_0 = 1.0$  Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$ ,  $\mu = 40$ . Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ .

Область колебаний на плоскости параметров  $\gamma, \beta$  при  $k = 0.01$  (а) и  $k = 0.5$  (б), построенные при  $z_0 = 0$  Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$ ,  $\mu = 40$ . Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$

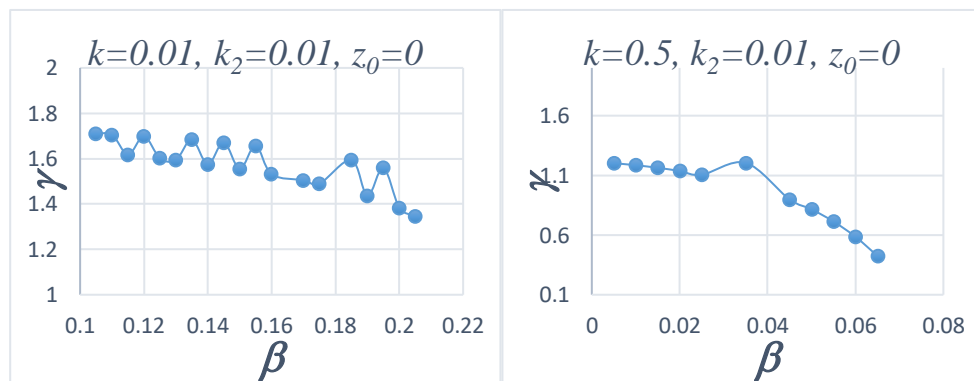


Рисунок 9 – Зависимости координаты точки  $x$  в сечении траекторий плоскостью  $y = 0$  от параметра  $\beta$  вблизи границы области автоколебаний при заданном значении  $\gamma = 1$  и двух различных значениях параметра  $k$ :  $k = 0.01$  (сверху) и  $k = 0.5$  (снизу). Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$ ,  $\mu = 40$ . Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ .

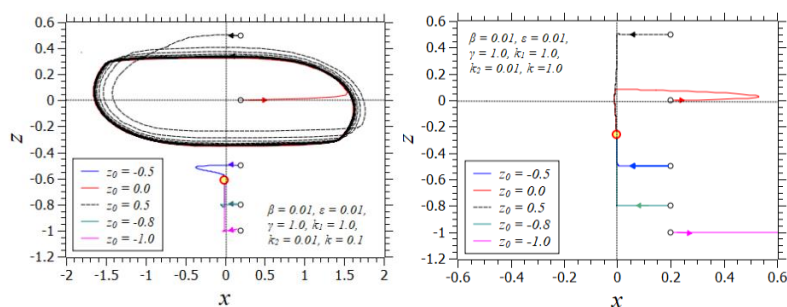


Рисунок 10 – Фазовые траектории, полученные при различных начальных значениях мемристивной переменной  $z_0$  в случае  $k = 0.1$  (а) и  $k = 1.0$  (б). Другие параметры:  $\varepsilon = 0.01$ ;  $k_1 = 1$ ;  $\beta = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$ ,  $\mu = 40$ .

Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ .

Фазовые траектории, полученные при различных начальных значениях мемристивной переменной  $z_0$  в случае  $k = 0.1$  (а) и  $k = 1.0$  (б). Начальные значения других переменных:  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.1$ . Пунктиром выделена условная граница между бассейнами притяжения аттракторов.

### Выводы

Добавление мемристивного элемента качественно изменяет динамику нейрона ФХН:

- В случае идеального мемристора (с бесконечно долгой памятью) возможно существование линии равновесий (при параметре  $\beta = 0$ ) или вообще отсутствие равновесий (при  $\beta \neq 0$ );
- В случае мемристора с конечным временем памяти возможна бистабильность, когда аттракторами являются предельный цикл и точка равновесия;
- Исчезают особенности динамики, приводящие к возбудимому режиму. В мемристивном нейроне ФХН (1) возбудимый режим отсутствует.
- Для мемристивного нейрона (1) при определенных начальных условиях наблюдается уход траекторий на бесконечность.

Таким образом, мемристивная цепочка дополнительной связи препятствует нормальному функционированию нейрона.

Можно также отметить следующую особенность динамики нейрона (1) с идеальным мемристором. В отличие от мемристивного генератора, рассмотренного в *I.A. Korneev et al. Nonlinear Dyn. 2017. Vol.89(4). P.2829* и других статьях, наличие оси равновесий в (1) не приводит к появлению притягивающего множества, включающего континуум замкнутых кривых. В (1) колебаниям всегда соответствует изолированная замкнутая кривая, т.е. предельный цикл. Предельный цикл может сосуществовать с притягивающими участками линии равновесий.

#### **Список использованных источников**

1. Ly M., Wang C., Ren G. et al. Model of electrical activity in a neuron under magnetic flow effect // *Nonlinear Dyn.* 2016. Vol.85(3). Pp.1479–1490.
2. Rianza R. Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits // *SIAM J. Appl. Math.* 2012. Vol. 72(3). pp.877–896.
3. Q. Li, S. Hu, S. Tang, G. Zeng. Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation // *Int. J. Cir. Theory Appl.* 2014. Vol.42. pp.1172–1188.
4. Korneev I.A., Semenov V.V. Andronov-Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria // *Chaos.* 2017. Vol. 27(8). 081104(1–5).
5. Korneev I.A., Slepnev A.V., Zakharova A.S., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Generalized model for steady-state bifurcations without parameters in memristor-based oscillators with lines of equilibria // *Nonlinear Dynamics.* 2022. Vol.111. pp.1235-1243.
6. Shepelev I.A., Shamshin D.V., Strelkova G.I., Vadivasova T.E. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh-Nagumo neurons with diffusive coupling // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2017. Vol.104. pp. 153-160.