МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

Проекторы Рисса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Сидорова Артема Александровича

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н, профессор А.П. Хромов

Зав. кафедрой
зав.кафедрой, д.ф-м.н, профессор С.И. Дудов

Саратов 2023

Введение

Проекторы Рисса — это линейные операторы, играющие фундаментальную роль в анализе линейных и нелинейных систем. Эти операторы были впервые введены Фридьесом Риссом в начале 20 века и с тех пор широко изучаются и используются в различных математических и научных областях.

В этой выпускной работе стремимся подробно изучить свойства и применение проекторов Рисса. Наше исследование предоставит всесторонний обзор текущего состояния знаний о проекторах Рисса и прольет свет на некоторые проблемы и открытые вопросы в этой области.

Актуальность. Понимание теории проекторов Рисса является важным шагом на пути к овладению инструментами функционального анализа и теории операторов и может дать ценную информацию о структуре и поведении сложных математических систем.

Основной целью исследования заключается доказательство свойств резольвенты интегрального оператора применительно к интегральным уравнениям второго рода, анализе свойств проекторов и доказательстве наиболее важных из них применительно к проекторам Рисса, доказательстве возможности представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом, формулировке и доказательстве теорем равносходимости для интегрального оператора с разрывным ядром.

Структура и объем. Бакалаврская работа содержит 44 стр. текста. Состоит из введения, четырех глав, заключения и приложение. Список использованных источников включает 20 наименований.

Методы исследования – включают в себя методы:

- теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
- интегральных уравнений;
- функционального анализа;
- спектральной теории операторов.

Основное содержание работы

В работе анализируются, на основе аналитических оператор функций, свойства резольвенты интегрального оператора применительно к интегральным уравнениям второго рода. Рассматриваются вопросы разложения по собственным функциям интегрального оператора, в частности, доказываются теоремы о свойствах проекторов Рисса, о возможности представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом, доказывается теорема равносходимости для интегрального оператора с разрывным ядром. Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной математической постановкой рассматриваемых задач, тщательным доказательством положений теорем, сравнением полученных результатов с аналогичными исследованиями других авторов.

В главе первой рассматриваются основные понятия,такие как интегральные операторы Гильберта-Шмидта и оператор-функции,зависящие от параметра.

Через A будем обозначать интегральные операторы вида

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt,$$

действующие в пространстве $L_2[0,1]$.

Будем рассматривать операторы Гильберта - Шмидта, т.е. когда ядро A(x,t) удволетворяет условию Гильберта - Шмидта:

$$\int_0^1 \int_0^1 [A(x,t)]^2 \, dxdt < +\infty$$

Сопряженный оператор A* определяется из условия

$$(Af, g) = (f, A * g),$$

где (.,.) - скалярное произведение в $L_2[0,1]$:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Таким образом, сопряженный оператор имеет вид

$$A * g = \int_0^1 A * (x,t) g(t) dt = \int_0^1 \overline{A(t,x)} g(t) dt,$$

т.е. A*(x,t)=$\overline{A(t,x)}$

В главе второй рассматриваются тригонометрические ряды Фурье и их свойства.

В главе третьей рассматриваются проекторы Рисса.

Определение. Резольвентой(или резольвентной Фредгольма) интегрального оператора А называется следующая оператор функция:

$$R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1} A,$$

где Е-единичный оператор, λ - комплексный параметр.

Комплексное число λ называется регулярной точкой, если оператор $(E - \lambda A)^{-1}$ ограничен.

Таким образом, $R_\lambda(A)$ есть оператор-функция, определенная на множестве регулярных точек.

Теорема 3.2. Резольвента $R_\lambda(A)$ допускает разложение в ряд Неймана

$$R_\lambda(A) = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + ...,$$

сходящийся по норме операторов в круге радиуса

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| A_n \|}}$$

Следствие 1 Резольвента $R_\lambda(A)$ в круге радиуса r представляет собой аналитическую оператор-функцию.

Лемма 3.1 Пусть А и М - операторы Гильберта - Шмидта, причем

$$Af = Mf + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k,$$

где $\{v_k\}$ и $\{g_k\}$ - линейно независимые системы элементов. Если $R_\lambda(A)$ $R_\lambda(M)$ существуют и $\triangle(\lambda) \neq 0$, то имеет место формула

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(M)f + \frac{1}{\triangle(\lambda)}\sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda)\sum_{j=1}^{m}((E-\lambda M)^{-1}f, v_j)\triangle_{jk}(\lambda), \qquad (3.1)$$

где $\triangle(\lambda) = det \parallel \delta_{j,k} - \lambda(g_k(\lambda), v_j \parallel_1^m, g_k(\lambda) = (E-\lambda M)^{-1}g_k, \delta_{kj}$ символ Кронекера $\triangle_{jk}(\lambda)$ алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя $\triangle(\lambda)$

Лемма 3.2 Если $\triangle(\lambda) \neq 0$ и $R_\lambda(M)$ существует, то $R_\lambda(A)$ существует и справедлива формула (3.1).

Теорема 3.3 Если A - оператор Гильберта - Шмидта, то резольвента $R_\lambda(A)$ есть мероморфная оператор функция параметра λ.

Теорема 3.5 Пусть $\lambda \neq \mu, \lambda$ и μ не являются характеристическими числами оператора A. Тогда имеет место формула

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda-\mu)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

Пусть γ какой нибудь контур в λ-плоскости, не проходящий через характеристические значения. Оператор

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\lambda d\lambda$$

называется проектором Рисса. Исследуем этот оператор.

Теорема 3.7 $AP = PA$.

Пусть теперь $\gamma = \lambda \parallel \lambda - \lambda_0 \mid = \delta$, где λ_0 - характеристическое значение оператора A, а γ - контур, не содержащий других характеристических чисел.

Обозначим $P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\lambda d\lambda$ и рассмотрим многообразие $\mathfrak{N}_{\lambda_0}= P_{\lambda_0}L_2$. По теореме 3.4 $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ - конечномерное пространство.

Лемма 3.3 Оператор A инвариантен на $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$, т.е. если $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$, то и $Af \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$

Таким образом оператор A можно рассматривать на конечномерном пространстве $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$.

Лемма 3.4 Пусть $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ есть A на $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Тогда $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ - конечномерный оператор, имеющий только одно характеристическое значение λ_0

Теорема 3.9 Имеет место $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

Обозначим по новому элементы этой системы. Теперь это система $\{\phi_j\}$, где $\phi_1 = (E-\lambda_0 A)^{s-1} f_{11}, \phi_2 = (E-\lambda_0 A)^{s-2} f_{11}, ..., \phi_s = f_{11}, \phi_{s+1} = (E-\lambda_0 A)^{s-1} f_{12}, \phi_{s+2} = (E-\lambda_0 A)^{s-2} f_{12}, ...$ Тогда получим

$$(E-\lambda_0 A)\phi_k = \epsilon_k \phi_{k-1}, k = 1, ..., p, \tag{3.24}$$

где ϵ_k принимают значения 0 или 1, причем $\epsilon_1 = 0$.

Определение . Система $\{\phi_k\}$,удовлетворяющая (29), называется системой собственных и присоединенных функций(здесь если $\epsilon_k = 0$, то ϕ_k - собственная функция, если $\epsilon_k = 1$, то ϕ_k - присоединенная функция) .

Определение . Пусть $\{u_j\}$ - некоторая линейно независимая система из $L_2[0,1]$. Система $\{v_j\} \in L_2[0,1]$ называется биортогональной к $\{u_j\}$, если $(u_j, v_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} - символ Кронекера.

Лемма 3.8 Имеет место следующая формула:

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{j=1}^{p} (f, \psi_j)\phi_j,$$

где $\{\psi_j\}_1^p$ - система ,биортогональная к $\{\phi_j\}_1^p$.

Лемма 3.10 Если ψ - с.п.ф. сопряженного оператора, соответствующего характеристическому значению $\overline{\lambda_1}$, а ϕ - с.п.ф. исходного оператора для характеристического значения λ_0 и $\lambda_1 \neq \lambda_0$, то $(\psi, \phi) = 0$.

Теорема 3.10(основная) Имеет место формула

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \alpha\lambda,$$

где $S_r(f,x) = \sum\limits_{|\lambda_k|<r} (f,\psi_k)\phi_k . \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - системы всех с.п.ф. для тех λ_k, для которых $|\ \lambda_k\ | < r, \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - система биортогональная всей системе $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Нумерация ϕ_k идет в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учетом кратности(т.е. каждому ϕ_k соответствует теперь только одно λ_k, или иначе, одно и то же λ_k повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных и присоединенных функций.

Утверждение теоремы дает важное представление частичной суммы $S_r(f,x)$ ряда Фурье но с.п.ф. через интеграл по контуры от резольвенты. Это представление играет значительную роль в спектральной теории операторов.

В главе четвертой рассматривается метод Нестрема, с помощью которого составлена программа вычисления резольвенты.

Метод Нестрема (метод последовательных приближений).

$$
\begin{aligned}
R_\lambda f \;&=\; (E-\lambda A)^{-1}Af = y \Big| (E-\lambda A)* \\
Af \;&=\; (E-\lambda A)y \\
y-\lambda Ay \;&=\; Af
\end{aligned}
$$

$$y-\lambda\int_a^b A(x,t)y(t)dt = g(x), \text{ где } g(x)=Af$$

Метод Нестрема — численный метод решения интегральных уравнений, основанный на представлении решения в виде суммы бесконечного ряда.

Рассмотрим интегральное уравнение вида:

$$y(x) = g(x) + \lambda\int_a^b A(x,t)y(t)dt$$

где $g(x)$ и $A(x,t)$ — заданные функции, λ — параметр.

Предположим, что решение этого уравнения можно представить в виде бесконечного ряда:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

где $y_n(x)$ — n-ое приближение к решению.

Подставляя этот ряд в исходное уравнение, получаем:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= g(x) + \lambda \int\limits_a^b A(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)dt \\
&= g(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b A(x,t) y_n(t)dt \\
&= g(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b A(x,t) \left(g(t) + \lambda \int\limits_a^b A(t,s) y_{n-1}(s)ds \right) dt \\
&= g(x) + \lambda \int\limits_a^b A(x,t)g(t)dt + \lambda^2 \int\limits_a^b A(x,t) \int\limits_a^b A(t,s)y_{n-1}(s)dsdt \\
&+ \lambda^3 \int\limits_a^b A(x,t) \int\limits_a^b A(t,s) \int\limits_a^b A(s,u)y_{n-2}(u)dudsdt + \cdots
\end{aligned}
$$

Таким образом, каждое приближение $y_n(x)$ выражается через предыдущие приближения и интегралы от заданных функций.

Для нахождения приближений можно использовать рекуррентную формулу:

$$
y_n(x) = g(x) + \lambda \int\limits_a^b A(x,t) \left(g(t) + \lambda \int\limits_a^b A(t,s) y_{n-1}(s)ds \right) dt
$$

Начальное приближение $y_0(x)$ может быть выбрано произвольно.

Сходимость метода нестрема зависит от выбора параметра λ и от свойств функций $g(x)$ и $A(x,t)$. Обычно параметр λ выбирают таким образом, чтобы ряд сходился быстрее всего.

Метод нестрема широко применяется в физике, математике и других науках для решения различных интегральных уравнений .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнены следующие исследования:

- введены и проанализированы основные понятия, определения и теоремы теории интегральных операторов;
- рассмотрены методы решения интегральных уравнений второго рода;
- рассмотрены и доказаны ряд свойств резольвенты;
- рассмотрены проекторы Рисса, имеющие важное значение в спектральной теории операторов, их свойства;