МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

**Асимптотика собственных функций линейных дифференциальных операторов**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Грешникова Вячеслава Валерьевича

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н, профессор А.П. Хромов

Зав. кафедрой
зав.кафедрой, д.ф-м.н, профессор С.И. Дудов

Саратов 2023

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Изучение асимптотики собственных функций линейных дифференциальных операторов является актуальным вопросом в современной математике и физике. Эта тема имеет широкое применение в различных областях, таких как квантовая механика, теория управления, теория дифференциальных уравнений и другие. Асимптотика собственных функций линейных дифференциальных операторов позволяет описать поведение системы вблизи ее критических точек и определить ее устойчивость. Это важно для понимания динамики системы и ее возможных изменений в будущем. Кроме того, асимптотика собственных функций является ключевым инструментом в решении многих прикладных задач, таких как оптимизация производственных процессов, управление технологическими процессами, моделирование физических явлений и т.д.

**Целью бакалаврской работы** является изучение асимптотики собственных функций линейных дифференциальных операторов, а также применение полученных знаний для решения дифференциальных уравнений на языке программирования Python.

**Объект исследования** – это линейные дифференциальные операторы и их собственные функции.

**Предмет исследования** – анализ асимптотического поведения собственных функций линейных дифференциальных операторов при стремлении собственных значений к бесконечности или к нулю.

Для достижения поставленной цели были выделены следующие задачи:

- Изучить собственные значения и собственные функции дифференциального оператора;
- Рассмотреть различные обобщения задач о собственных значениях;
- Изучить собственные значения и собственные функции самосопряженного оператора и их соотношения;
- Изучить асимптотику собственных значений и собственных функций при больших значениях $|\lambda|$;
- Выполнить решение дифференциальных уравнений на языке программирования Python с помощью ODEINT;

- Выполнить решение дифференциальных уравнений на языке программирования Python с помощью SymPy.

**Практическая значимость** бакалаврской работы состоит в том, что данная тема широко используется в различных областях науки и техники:

1. Физика: в задачах квантовой механики, теории поля, теории упругости и других областях физики используются линейные дифференциальные операторы, и анализ их собственных функций является важным инструментом для понимания физических явлений.
2. Математика: анализ собственных функций линейных дифференциальных операторов является одной из основных задач математической физики и функционального анализа. Эта тема имеет важное значение для различных областей математики, таких как теория дифференциальных уравнений, теория операторов, теория функций и другие.
3. Инженерия: анализ собственных функций линейных дифференциальных операторов может быть применен в различных областях инженерии, таких как теория управления, теория сигналов, теория электрических цепей и другие.

**Структура и содержание бакалаврской работы.** Работа состоит из введения, 3 частей, заключения, списка использованных источников, содержащего 21 наименование, и шести задач. Общий объем работы составляет 59 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **введении** объясняется значимость выбранной темы, формулируется цель работы и решаемые задачи.

В **первой** части рассматриваются собственные значения и собственные функции дифференциального оператора и самосопряженного оператора. Число $\lambda$ называется *собственным значением* оператора $L$, если в области определения $D$ оператора $L$ существует функция $y \neq 0$, такая, что

$$Ly = \lambda y. \tag{1}$$

Эта функция $y$ называется *собственной функцией* оператора $L$, соответствующей собственному значению $\lambda$.

Пусть $l(y)$ и

$$U_i(y) = 0, \ldots, U_m(y) = 0 \tag{2}$$

— дифференциальное выражение и краевые условия, порождающие оператор $L$. Так как собственная функция $y$ должна принадлежать области определения оператора $L$, то она должна удовлетворять условиям (2). Кроме того, $Ly = l(y)$, следовательно, из (1) имеем

$$l(y) = \lambda y. \tag{3}$$

Таким образом: собственные значения оператора $L$ - те значения параметра $\lambda$, при которых однородная краевая задача

$$l(y) = \lambda y, \quad U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

имеет нетривиальные решения, эти нетривиальные решения являются соответствующими собственными функциями.

Краевая задача (4) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда ранг $r$ матрицы

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) \ldots U_2(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_m(y_1) \ldots U_m(y_n) \end{pmatrix}$$

меньше $n$.

Если $m < n$, то и $r < n$. В этом случае краевая задача (4) имеет нетривиальное решение при любом значении $\lambda$.

Следовательно, при $m < n$ любое значение $\lambda$ является собственным.

Если $m \geqslant n$, то ранг матрицы $U$ будет меньше $n$ тогда и только тогда, когда все определители $n$-го порядка матрицы $U$ равны нулю. Но каждый из этих определителей есть целая аналитическая функция от $\lambda$. Поэтому возможны только следующие случаи:

1. Все определители $n$-го порядка матрицы $U$ тождественно равны нулю. В этом случае любое значение $\lambda$ по-прежнему является собственным.

2. Хотя бы один из определителей $n$-го порядка матрицы $U$ не является тождественным нулем. В этом случае собственными значениями могут быть лишь нули этого определителя и притом те, для которых обращаются в нуль все остальные определители $n$-го порядка матрицы $U$.

Объединяя все случаи , мы получаем следующую альтернативу:

- I. Для всякого дифференциального оператора $L$ имеют место только следующие две возможности:

  1. Всякое число $\lambda$ есть собственное значение оператора $L$.

  2. Множество собственных значений оператора $L$ не более чем счетно (в частности, оно может быть пустым) и не имеет конечных предельных точек.
- II. Собственные значения оператора $L$ нули функции $\Delta(\lambda)$. Если функция $\Delta(\lambda)$ тождественно равна нулю, то всякое число $\lambda$ есть собственное значение оператора $L$.
- III. Если $\lambda_0$ есть нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ кратности $\nu$, то кратность собственного значения $\lambda_0$ не превосходит $\nu$.
- IV. Если $\lambda_0$ есть простой нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, то кратность собственного значения $\lambda_0$ оператора $L$ равна единице..
- V. Если $\lambda_0$ – ноль функции $\Delta(\lambda)$ кратности $m$, то кратность любой собственной функции, отвечающей $\lambda_0$, не превосходит $m$.
- VI. Сумма кратностей $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ равна кратности нуля $\lambda_0$ функции $\Delta(\lambda)$:
$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m.$$

Теория присоединенных функций является аналогом теории элементарных делителей линейных операторов в конечномерном пространстве. Приведенная в этой части теория присоединенных функций принадлежит М. В. Келдышу.

Далее производится **сведение уравнения $l(y) + p^n y = 0$ к интегро-дифференциальному уравнению**.

$$y = \acute{c}_1 e^{\rho\omega_1 x} + \ldots + \acute{c}_n e^{\rho\omega_n x} +$$

$$+\frac{1}{np^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)m_\xi(y)d\xi-\frac{1}{np^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)m_\xi(y)d\xi, \tag{5}$$

где

$$K_1(x,\xi,\rho)=\sum_{\alpha=1}^{k}\omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)},\quad K_2(x,\xi,\rho)=\sum_{\alpha=k-1}^{n}\omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}. \tag{6}$$

Данное уравнение (6) является интегро-дифференциальным уравнением относительно $y$. Из него и будут в дальнейшем получены асимптотические формулы. Для их вывода предварительно была доказана **лемма о системе интегральных уравнений**:

*Пусть дана система интегральных уравнений*

$$y_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x,\xi,\lambda)y_j(\xi)d\xi,\quad i=1,2,\dots,r, \tag{7}$$

*где:*

1. *Функции $f_i(x)$ непрерывны в интервале $[a,b]$;*
2. *При каждом фиксированном $\lambda$ функции $A_{ij}(x,\xi,\lambda)$ непрерывны при $a\leqslant x<\xi$ и $\xi<x\leqslant b$;*
3. *При фиксированных $x$ и $\xi$ $(a\leqslant x,\xi\leqslant b)A_{ij}(x,\xi,\lambda)$ - регулярные аналитические функции параметра $\lambda$;*
4. *Существуют постоянные $R$ и $C$, такие, что при $|\lambda|>R$*

$$|A_{ij}(x,\xi,\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}$$

*во всем квадрате $a\leqslant x,\xi\leqslant b$.*

*Тогда при достаточно большом $R_0$ и $|\lambda|>R_0$ система (8) имеет одно и только одно решение $y_i(x)=y_i(x,\lambda)$; при этом $y_i(x,\lambda)$ являются аналитическими функциями параметра $\lambda$, регулярными при $|\lambda|>R_0$, и*

$$y_i(x,\lambda)=f_i(x)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\quad\text{при}\quad\lambda\to\infty,$$

*где выражение $O\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$ обозначает функцию вида $\frac{f(x,\lambda)}{\lambda^k}$, где $|f(x,\lambda)|\leqslant C$ при $a\leqslant x\leqslant b$, $|\lambda|\geqslant R_0$ и некоторых постоянных $C$ и $R_0$.*

Далее были получены **асимптотические формулы** для решения уравнения $l(y) + p^n y = 0$, и доказана данная теорема:

**Теорема 1.** Если функции $p_2, \ldots, p_n$ непрерывны в интервале $[0, 1]$, то во всякой области $T$ комплексной $\rho$-плоскости уравнение

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y + \rho^n y = 0$$

имеет $n$ линейно-независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярных относительно $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} y_k = e^{\rho\omega_k x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \frac{dy_k}{dx} = \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} = \rho^{n-1} e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Выходит, что в каждой из них есть линейно независимые решения $y_1, y_2$ которые можно асимптотически представить в виде

$$y_1 = e^{i\rho x}[1 + O(\frac{1}{\rho})],$$

$$y_2 = e^{-i\rho x}[1 + O(\frac{1}{\rho})].$$

Если $\rho$ вещественно и положительно, то эти решения можно заменить их линейными комбинациями

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(\rho x) + O(\frac{1}{\rho}),$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \sin(\rho x) + O(\frac{1}{\rho}).$$

В случае уравнения второго порядка $y" + p(x)y + \rho^2 y = 0$ имеются четыре области $S$. В силу доказанной выше теоремы в каждой из них есть линейно независимые решения $y_1, y_2$ которые можно асимптотически представить в виде

$$y_1 = e^{i\rho x}[1 + O(\frac{1}{\rho})],$$

$$y_2 = e^{-i\rho x}[1 + O(\frac{1}{\rho})].$$

Если $\rho$ вещественно и положительно, то эти решения можно заменить их линейными комбинациями

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(\rho x) + O(\frac{1}{\rho}),$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \sin(\rho x) + O(\frac{1}{\rho}).$$

Так же для достижения главной цели работы, была доказана следующая теорема.

**Теорема 2**. Собственные значения дифференциального оператора $n$-ого порядка в интервале $[0, 1]$, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности $\lambda'_k, \lambda''_k (k = N, N+1, N+2, \ldots)$, где $N$ - некоторое целое число.

При нечетном $n$, $n = 4q - 1$,

$$\lambda'_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (9)$$

$$\lambda''_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (10)$$

а для нечетного $n, n = 4q + 1$,

$$\lambda'_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (11)$$

$$\lambda''_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \qquad (12)$$

где $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ - определенные ранее корни уравнения $\theta_1 \xi + \theta_0 = 0$, отвечающего области $S_\nu$ с $\nu$, соответственно нечетным и четным.

И наконец, применим ранее полученные результаты к нахождению асимптотических формул для собственных функций при больших по модулю собственных значениях.

Итогом вычислений станут следующие формулы.

В случае если $n$ нечетно:

$$y_k^{(\sigma)} = \det(X_{1k}^{(\sigma)}, X_{2k}^{(\sigma)}), \tag{13}$$

где

$$X_{1k}^{(\sigma)} = \left\{\begin{array}{cccc} e^{\omega_1\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & e^{\omega_\mu\rho_k^{(\sigma)}x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \dots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2+\xi\beta_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \dots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n+\xi\beta_n]\omega_\mu^{k_n} \end{array}\right\},$$

$$X_{2k}^{(\sigma)} = \left\{\begin{array}{ccc} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] & \dots & e^{\omega_n\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{array}\right\},$$

$k = N, N+1, \dots; N-$ достаточно большое натуральное число, а $\sigma = 1, 2$.

И в случае если $n$ четно:

$$y_k = \det(X_{1k}, X_{2k}), \tag{14}$$

где

$$X_{1k} = \left\{\begin{array}{ccccc} e^{\omega_1\rho'_k x}[1] & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho'_k x}[1] & e^{\omega_\mu\rho'_k x}[1] & e^{-\omega_\mu\rho'_k x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \dots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2+\xi'\beta_2]\omega_\mu^{k_2} & [\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \dots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n+\xi'\beta_n]\omega_\mu^{k_n} & [\alpha_n+\frac{1}{\xi'}\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} \end{array}\right\},$$

$$X_{2k} = \left\{\begin{array}{ccc} e^{\omega_{\mu+2}\rho'_k(x-1)}[1] & \dots & e^{\omega_n\rho'_k(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \dots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+2}^{k_n} & \dots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{array}\right\}.$$

**Третья** часть посвящена решению дифференциальных уравнений с помощью языка программирования Python. Дифференциальные уравнения решаются в Python с помощью пакета *Scipy.integrate* с использованием функции *odeint* или *solve_ivp*. *ODEINT* требует трех входных данных:

$$y = odeint(model, y_0, t).$$

1. **Модель:** имя функции, которая возвращает производные значения при запрошенных значениях $y$ и $t$ как $dydt = \text{модель}(y, t)$;
2. $\mathbf{y}_0$ : Начальные условия;
3. **t:** Моменты времени, в которые решение должно быть сообщено. Дополнительные внутренние точки часто рассчитываются для поддержания точности решения.

С использованием ODEINT были решены четыре задачи:

1. Найдите решение дифференциальному уравнению с соответствующими начальными условиями.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + 1,$$

$$y(0) = 0.$$

2. Найдите численное решение дифференциальному уравнению, u скачет от 0 до 2 когда $t = 10$.

$$5\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + u(t),$$

$$y(0) = 1.$$

3. Решить уравнение и показать, что решения эквивалентны.

$$\frac{dx}{dt} = 3\exp(-t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 3 - y(t),$$

$$x(0) = 0,$$

$$y(0) = 0.$$

4. Найти решение дифференциальному уравнению, где $S(t-5)$ представляет собой ступенчатую функцию, изменяющуюся от нуля до единицы при $t = 5$. При умножении на два оно изменяется от нуля до двух.

$$2\frac{2dx(t)}{dt} = -x(t) + u(t),$$

$$5\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t),$$
$$u = 2S(t-5), x(0) = 0, y(0) = 0.$$

Дальнейшие задачи были решены с применением SymPy. Это библиотека символьных вычислений для языка Python. Она позволяет решать математические задачи, используя символьные выражения вместо чисел. SymPy также позволяет решать уравнения и системы уравнений, находить производные и интегралы, работать с матрицами и многое другое.

Данная библиотека была использована для решения следующих задач:

1. Найти решение дифференциальному уравнению с заданными условиями
$$\begin{cases} y'' + 9y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$
2. Найти решение дифференциальному уравнению с заданными условиями
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Таким образом, в этой части работы было продемонстрировано, что при помощи библиотек языка Python можно производить наглядные и точные решения дифференциальных уравнений.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотика собственных функций линейных дифференциальных операторов является важным инструментом для исследования их свойств и поведения при стремлении к бесконечности. Она позволяет определить, как быстро собственные значения собственных функций убывают или растут при увеличении порядка оператора, а также как они распределены в пространстве.

В ходе написания выпускной квалификационной работы были достигнуты следующие результаты:

- изучены собственные значения и собственные функции дифференциального оператора;
- рассмотрены различные обобщения задач о собственных значениях;
- изучены собственные значения и собственные функции самосопряженного оператора и их соотношения;
- изучены асимптотики собственных значений и собственных функций при больших значениях $|\lambda|$;
- выполнено решение дифференциальных уравнений на языке программирования Python с помощью ODEINT;
- выполнено решение дифференциальных уравнений на языке программирования Python с помощью SymPy.

Таким образом, анализ асимптотики собственных функций линейных дифференциальных операторов является важным шагом в исследовании их свойств и может быть использован для решения различных задач в математике и физике.