МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Метод рационализации решения неравенств

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Куликовой Татьяны Михайловны

Научный руководитель

Доцент, к.п.н., доцент ________________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ________________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2023

Введение. Актуальность исследуемой темы обуславливается педагогическими проблемами в сфере школьного курса математики. Безусловно, решению различных видов неравенств должно уделяться пристальное внимание, тем не менее, продолжительность данного курса не столь велика, ввиду чего ученики получают недостаточно практических знаний, что влияет на возникновение проблем в рамках исследуемой тематики.

Важность изучения процесса и особенностей решения различных видов неравенств отмечается как в рамках курса математики в школе, так и в ВУЗе.

Рассматриваемые неравенства часто попадаются ученикам в вариантах ЕГЭ по математике, и данный факт влияет на прямую потребность к выявлению методических приемов обучения их решению.

Многообразие примеров в школьных учебниках объясняется равным многообразием методов их решения. Между тем, основная проблема учеников представляет собой неспособность определения необходимого метода решения.

Теоретическую основу бакалаврской работы составили труды российских педагогических деятелей: Титоренко С. А., Апеваловой Е. С., Игнатовой Я. С., Шумай Т. А., Тумановой А. А., Худык Н. В., Бенгиной Т. А.

На протяжении длительного времени вопросы о целесообразности использования метода рационализации при решении неравенств исследовались такими авторами, как Сухтаева А. М., Лахикова З. Г., Демина Т. Ю., Новоселова О. А., Соловьева А. А., Саруян А. И. и другими.

Цель бакалаврской работы – теоретически обосновать и практически продемонстрировать эффективное использование метода рационализации при решении неравенств.

Исходя из данной цели, были поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть теоретические основы метода рационализации.
2. Описать историю возникновения метода рационализации.
3. Обосновать преимущество метода рационализации перед традиционными методами решения неравенств.

4. Разработать серии неравенств по теме «Метод рационализации решения неравенств».

5. Сформулировать методические рекомендации по использованию метода рационализации при подготовке к ЕГЭ по математике.

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ научно-методической литературы, разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: титульный лист; введение; два раздела («Теоретические основы применения метода рационализации решения неравенств», «Метод рационализации решения неравенств: практические аспекты»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Теоретические основы применения метода рационализации решения неравенств» посвящен решению первой, второй и третьей задач бакалаврской работы.

Термин «рационализация» произошел от латинского слова ratio – разум. Следовательно, под рационализацией следует понимать усовершенствование деятельности для улучшения механизмов и способов ее выполнения.

Метод рационализации, как один из методов решения неравенств, известен уже около 50 лет. В разных источниках названия данного метода разнятся. Названия – метод декомпозиции, метод замены множителей, обобщенный метод интервалов, подразумевают под собой один и тот же метод.

Мнение авторов по поводу происхождения названия метода рационализации разнятся, одни считают, что название происходит от сведения неравенств к рациональным неравенствам (А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев), другие же отталкиваются от возможности более рационального решения неравенств (В. В. Мендель).

Сам термин «рационализация неравенств» впервые встречается в работах Г. В. Дорофеева («Математика в школе» № 3 в статье «Обобщенный метод интервалов») в 1969 году, а идею метода декомпозиции (но без названия) находим у В. П. Моденова (в книге «Пособие по математике») в 1972 году, в 2001 году автор уже даёт ему название.

Термин «метод замены множителей» относится к 90-м годам, который введен Голубевым В. И. и Тарасовым В. А. в работе «Эффективные пути решения неравенств» (Львов. Квантор, 1992).

Причина использования метода рационализации при решении неравенств из банка ЕГЭ заключается в том, что не всякое неравенство в результате преобразований или с помощью «удачной» замены переменной может быть сведено к неравенству «стандартного» вида, т. е. для которого существует определенная схема решения. В таких случаях иногда оказывается полезным использовать нестандартные методы решения, которые во многих случаях являются эффективными и существенно упрощают решение задачи. Одним из таких нестандартных методов решения неравенств повышенной сложности является метод рационализации.

Рассмотрено преимущество рассматриваемого метода перед традиционными методами при решении нестандартных неравенств – применение стандартных способов решения неравенств часто бывает затруднительным или невозможным. Метод рационализации позволяет избежать многих нежелательных осложнений и ускорить процесс решения неравенств; введение более целесообразных действий для упрощения алгоритма решения.

Также нами выяснено, что метод рационализации базируется на концепции равносильности математических высказываний и реализуется в виде алгоритмов рационализации, т. е. осуществляется с помощью равносильных преобразований по знаку в области определения сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при котором неравенство $G(x)0(G(x)0)$ равносильно неравенству $F(x)0(F(x)0)$. В этом случае говорят, что выражение $G(x)$ является рационализацией для выражения $F(x)$. Метод рационализации используют при решении неравенств вида $F(x)\vee 0$ (символ $\vee$ означает один из знаков неравенств$\leq, \geq, <, >$¿), в которых выражение $F(x)$ удается рационализировать.

Продемонстрировали свойства метода рационализации, использовав следующую таблицу 1:

Таблица 1 – Свойства метода рационализации

Свойства метода рационализации		
№	Выражение F	Выражение G
(1.1) (1.2) (1.3)	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$ $(где\, f>0;\, g>0)$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
(2.1) (2.2) (2.3)	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$ $(где\, h>0;\, h\neq 1;\, f>0;\, g>0)$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
(3)	$\log_f h-\log_g h$ $(где\, h>0;\, f>0;\, g>0;\, f\neq 1;\, g\neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
(4.1) (4.2)	h^f-h^g h^f-1 $(где\, h>0;\, h\neq 1)$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
(5) (5.1)	f^h-g^h $(где\, f>0;\, g>0;\, f\neq 1;\, g\neq 1)$ $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ $(где\, f\geq 0;\, g\geq 0)$	$(f-g)h$ $f-g$
(6)	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Мы также выделили случаи, в которых необходимо и целесообразно применять данный метод. Рассмотрели применение метода на примерах решения логарифмических, показательных, иррациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2<1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2-1<0$

$$\log_a f-1\rightarrow (a-1)(f-a)$$

В нашем примере $\log_{2x+3} x^2-1$ заменим $(2x+2)(x^2-2x-3)$.

Получим:

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3)<0, \\ 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 1, \\ x\neq 0; \end{cases} \le ¿$$

$$¿> \begin{cases} (x+1)^2(x-3)<0, \\ x>-1{,}5, \\ x\neq -1, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Решением последней системы является $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

Ответ: $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

Во втором разделе «Метод рационализации решения неравенств: практические аспекты» решались четвертая и пятая задачи бакалаврской работы. Было рассмотрено применение метода на примере решения логарифмических, показательных и иррациональных неравенств, встречающихся в материалах профильного ЕГЭ по математике. Продемонстрируем некоторые из них.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{\log_5(2x+1)\times\log_3 x-2}{\log_2(5x)\times\log_{0,2}x}\ge 0$.

Решение. Данное неравенство не требует преобразований, т. к. в левой части неравенства присутствует разложение на множители, а в правой – ноль. Применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \dfrac{(5-1)(2x+1-1)(3-1)(x-2-1)}{(2-1)(5x-1)(0{,}2-1)(x-1)}\ge 0, \\ 2x+1>0, \\ 5x>0, \\ x-2>0, \\ x>0; \end{cases} \le ¿$$

$$¿> \begin{cases} \dfrac{20x\times(x-3)}{(5x-1)(x-1)}\le 0, \\ x>2. \end{cases}$$

Воспользуемся методом интервалов для решения системы неравенств (рисунок 1):

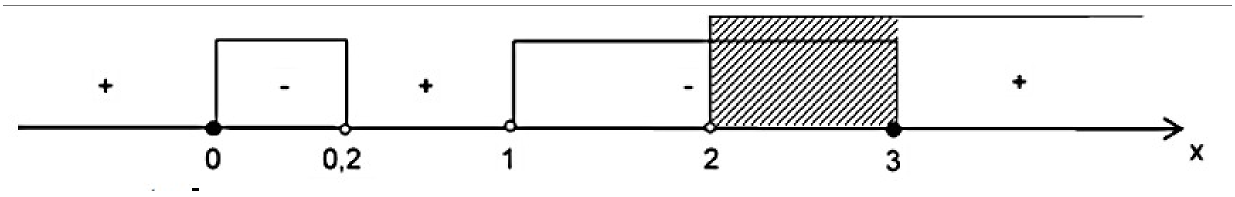

Рисунок 1 – Иллюстрация к примеру 2

Ответ: ¿.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0.$

Решение. Используя метод рационализации, получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right)\ge 0,\\ \log_x\sqrt{3-x}>0,\\ 3-x>0,\\ x>0,\\ x\neq 3,\\ x\neq 1; \end{cases} \le \text{¿}$$

$$\text{¿}>\begin{cases} (x-3)(x-1)(\sqrt{3-x}-x)\ge 0,\\ (x-1)(\sqrt{3-x}-1)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\neq 1; \end{cases} \le \text{¿}$$

$$\text{¿}>\begin{cases} (x-1)(3-x-x^2)\le 0,\\ (x-1)(3-x-1)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\neq 1; \end{cases} \le \text{¿}$$

$$\text{¿}>\begin{cases} \left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\ge 0,\\ 1<x<2. \end{cases} \text{¿}>\text{¿}$$

$$\text{¿}>\text{¿}\ \frac{\sqrt{13}-1}{2}\le x<2.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right).$

Пример 4. Решить неравенство $\left(x^2-x-2\right)^{\left(2x^2-x-1\right)}\ge\left(x^2-x--2\right)^{\left(9-x^2\right)}.$

Решение. Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2\neq 1,\\ \left(\left(x^2-x-2\right)-1\right)\left(\left(2x^2-x-1\right)-\left(9-x^2\right)\right)\ge 0. \end{cases}$$

Решив два первых неравенства, найдем ОДЗ исходного показательного неравенства $\begin{cases} x\leftarrow 1\ или\ x>2,\\ x\neq\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Найдем ОДЗ методом интервалов:

$$x\in\left(-00;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+00\right).$$

Далее рассмотрим основное неравенство:

$$\left(\left(x^2-x-2\right)-1\right)\left(\left(2x^2-x-1\right)-\left(9-x^2\right)\right)\geq 0.$$

Сведем его к виду: $\left(x^2-x-3\right)\left(3x^2-x-10\right)\geq 0.$

Корни первого множителя этого неравенства нашли ранее, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$

Корни второго множителя равны $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{121}}{6},x_3=\frac{-5}{3},x_4=2.$

Выполним упорядочение корней, так как $3<\sqrt{13}<4, mo\, x_3<x_1<x_4<x_2.$

Применяя метод интервалов, получим следующее решение основного неравенства:

$$x\in\left(-00;-\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};2\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+00\right).$$

Учитывая найденное ОДЗ, получим окончательный ответ:

$$x\in\left(-00;-\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+00\right).$$

Ответ: $\left(-00;-\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+00\right).$

Пример 5. Решить неравенство $\frac{8^x-5\times 2^x}{(x^2-1)(2^x-2^{4-x})}\geq 0.$

Решение. Рассмотрим числитель дроби:

$$8^x-5\times 2^x=2^x\times 4^x-5\times 2^x=2^x\times\left(4^x-5\right)$$

Получим:

$$\frac{2^x(4^x-5)}{(x^2-1)(2^x-2^{4-x})}\geq 0\leq ¿\frac{2^x\left(4^x-4^{\log_4 5}\right)}{(x-1)(x+1)(2^x-2^{4-x})}\geq 0$$

Заметим, что $2^x>0$ для $\forall x$. Теперь решим данное неравенство методом рационализации:

$$\frac{(4-1)(x-\log_4 5)}{(x-1)(x+1)(2-1)(x-(4-x))}\geq 0\leq ¿\frac{(x-\log_4 5)}{(x-1)(x+1)(2x-4)}\geq 0$$

Полученное неравенство решаем методом интервалов (рисунок 2):

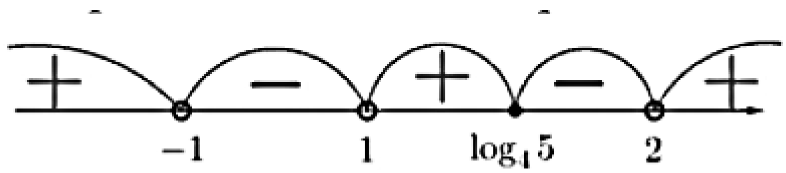

Рисунок 2 – Решение методом интервалов

Ответ: $(-00;1)\cup(1;\log_4 5]\cup(2;+00)$.

Пример 6. Решим неравенство: $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

Решение. Введем функцию $F(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}-(8-2x)$.

Найдем область определения функции, решив неравенство: $-x^2+6x-5\geq 0$.

Получим $D(f)=[1;5]$.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{-x^2+6x-5}-(8-2x)>0$.

Найдем нули функции, решив уравнение $\sqrt{-x^2+6x-5}-(8-2x)=0$.

Иррациональное уравнение $\sqrt{-x^2+6x-5}=(8-2x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases}-x^2+6x-5=(8-2x)^2, \leq ¿\\ 8-2x\geq 0;\end{cases}$$

$$¿>\begin{cases}5x^2-38x+69=0,\\ x\leq 4.\end{cases}$$

Уравнение имеет два корня: $x=3 и x=4{,}6$. Второй корень не удовлетворяет неравенству $x\leq 4$,следовательно, решение системы $x=3$.

На числовой прямой обозначим область определения функции и нуль функции $x=3$. На каждом из полученных промежутков определим знак функции $F(x)$ (рисунок 3):

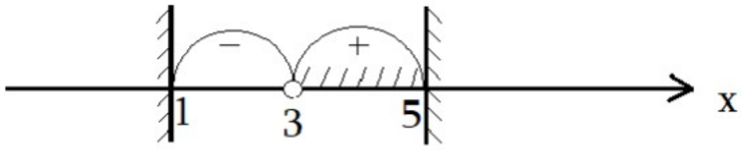

Рисунок 3 – Графическая иллюстрация решения примера 6

Ответ: (3;5].

Пример 7. Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1$.

Преобразуем неравенство к виду: $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+2x+8}{x+5}>0$.

Введем функцию $F(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-6}+2x+8}{x+5}$ и найдем ее область определения:

$$\begin{cases} x^2+x-6\geq 0, \leq ¿ \\ x+5\neq 0; \end{cases}$$

$$¿>\begin{cases} (x+3)(x-2)\geq 0, \\ x\neq -5. \end{cases}$$

Получим $D(f)=(-00;-5)\cup(-5;-3]\cup[2;+00)$.

Найдем нули функции, решив уравнение $\sqrt{x^2+x-6}+2x+8=0$ или $\sqrt{x^2+x-6}=-(2x+8)$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+x-6=(2x+8)^2, \leq ¿ \\ 2x+8\leq 0; \end{cases}$$

$$¿>\begin{cases} 3x^2+31x+70=0, \\ x\leq -4. \end{cases}$$

$x=-7$ – решение системы, $x=\frac{-10}{3}$ – посторонний корень.

На числовой прямой отметим область определения и нуль функции $x=-7$.

На каждом из полученных промежутков определим знак функции $F(x)$ (рисунок 4):

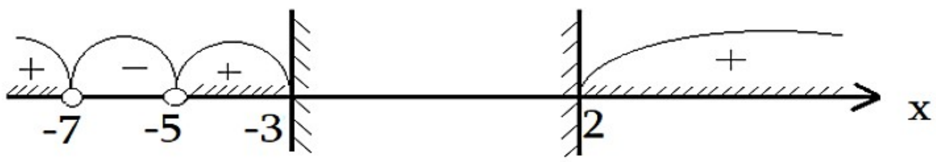

Рисунок 4 – Графическая иллюстрация решения примера 7

Ответ: $(-00;-7)\cup(-5;-3]\cup[2;+00)$.

Также нами были сформулированы методические рекомендации по использованию метода рационализации в рамках подготовки и сдачи ЕГЭ по математике.

Мы обозначили, что с позиции деятельностного подхода и личностно ориентированного подхода в обучении целесообразна и дидактически оправдана следующая <u>ориентировочная основа действий</u> (ООД) при решении неравенств вида $\frac{U_1*U_2*\ldots*U_n}{u_1*u_{2*\ldots*u_n}}\vee 0$:

1) найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной;

2) рационализировать неравенство с использованием свойств метода рационализации и решить полученное неравенство классическим методом интервалов;

3) отобрать решения данного неравенства с учетом ОДЗ.

Эта ООД является полной, сформулирована в общем виде, может быть использована в ходе совместной творческой деятельности учителя и учащихся, т. е. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к ООД.

Учитель, работающий в классах с углубленным изучением математики, или в обычных общеобразовательных классах, должен показывать на уроках примеры, как проводить решение неравенств повышенной сложности методом рационализации, наглядно демонстрируя, что это не только экономит время, но и позволяет снизить риск логических и вычислительных ошибок.

Приведем один пример. (Тема «Решение неравенств с модулем», 9 класс).

Решая неравенство $\dfrac{2|x|-3}{|x^2-3x+2|-|x-1|}\geq 0$, не нужно рассматривать никакие случаи, достаточно заменить разности модулей в числителе и знаменателе разностями квадратов: $\dfrac{4x^2-9}{(x^2-3x+2)^2-(x-1)^2}\geq 0$.

После разложения числителя и знаменателя на множители получим: $\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{(x^2-4x+3)(x^2-2x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{(x-1)(x-3)(x-1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{(x-1)^3(x-3)}\geq 0$.

Теперь применяем метод интервалов и записываем ответ.

Ответ. $x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]\cup(3,+\infty)$.

Заключение. Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы:

1. Рассмотрены теоретические основы метода рационализации.

2. Описана история возникновения метода рационализации.

3. Обоснованы преимущества метода рационализации перед традиционными методами решения неравенств.

4. Разработаны серии неравенств (логарифмических, показательных, иррациональных) по теме «Метод рационализации решения неравенств».

5. Даны методические рекомендации по использованию метода рационализации при подготовке к ЕГЭ по математике.