МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета

Климовой Валерии Викторовны

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова
Зав. Кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2023

Основные результаты исследования

1 Автореферат бакалаврской работы

Введение. Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО) «овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач» относится к предметным результатам изучения предметной области «Математика и информатика».

С основными понятиями раздела «Функции», такими как: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, периодическая функция, четная и нечетная функции, сложные функции и др., учащиеся знакомятся в курсах «Алгебра 7-9» и «Алгебра и начала анализа 10-11» на базовом и углубленном уровнях.

Из фундаментального ядра содержания общего образования следует, что «функция и способы ее задания, чтение и построение графиков функций, основные свойства функции: монотонность, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы, ограниченность функций, четность и нечетность, периодичность» относятся к изучению такой предметной области как «Математический анализ».

Фундаментальное ядро содержания общего образования определяет, что школьное математическое образование способствует овладению универсальным математическим языком, универсальным для естественно-научных предметов, знаниями, необходимыми для существования в современном мире.

Важную роль в формировании и возникновении понятия функции и ее приложений сыграли многие ученые математики (П. Ферма, Р. Декарт, И.

Ньютон, Г. В. Лейбниц, И. Бернулли, Л. Эйлер, Ж. Л. Д’Аламбер, Н. Лобачевский, П. Дирихле).

Вопросами по теме «Функции и графики» занимались авторы всех существующих учебников (А. Г. Мордкович, С. М. Никольский, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин, А. Г. Мерзляк и др.), а также составители сборников задач и пособий для поступающих в вузы (Г. Дорофеев, В. Зорин, Е. Островский и др.).

Теме «Построение графиков сложных функций» посвящены исследования Григорян К. М., Мещеряковой С. И., Абрашина П. И., Редкозубова И. А., Малютиной О. П. и др.

Все вышесказанное обосновывает актуальность темы исследования.

Цель бакалаврской работы – теоретически обосновать и практически разработать методические материалы по теме «Построение графиков сложных функций» на уроках алгебры и начал анализа.

Задачи бакалаврской работы:

1) рассмотреть основные понятия по теме исследования;

2) описать основные методы построения графиков функций;

3) выявить трудности, возникающие у учащихся при построении графиков сложных функций;

4) разработать серию задач по различным специфическим методам на уроках алгебры по теме: «Построение графиков сложных функций».

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ методико-математической и учебной литературы; разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: титульный лист, введение, два раздела («Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа: теоретические аспекты», «Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа: практические аспекты»), заключение и список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа: теоретические аспекты» посвящен решению первой, второй и третьей задач бакалаврской работы.

В первом пункте данного раздела описываются требования ФГОС к функционально-графической линии.

ФГОС третьего поколения устанавливает требования к освоению предметных результатов программ основного общего уровня образования на по учебному предмету «Математика» (на базовом уровне):

– умение оперировать понятиями: функция, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания, убывания, наибольшее и наименьшее значения функции; умение оперировать понятиями: прямая пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, парабола, гипербола; умение строить графики функций, использовать графики для определения свойств процессов и зависимостей, для решения задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение выражать формулами зависимости между величинами.

ФГОС третьего поколения устанавливает требования к освоению предметных результатов программ основного общего уровня образования на по учебному предмету «Математика» (на углубленном уровне):

– умение свободно оперировать понятиями: зависимость, функция, график функции, выполнять исследование функции; умение свободно оперировать понятиями: прямая пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, парабола, гипербола, кусочно-заданная функция; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики для исследования процессов и зависимостей; при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение выражать формулами зависимости между величинами.

Во втором пункте раздела рассмотрены основные понятия и свойства обратных функций.

Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X; пишут: $y = f(x), x \in X$. При этом переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y – зависимой переменной.

Определение 2. Графиком функции $y = f(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости xOy вида $\big(x;\ f(x)\big)$, где x – любое число из области определения функции.

Определение 3. Пусть даны функции $z = g(y), y = f(x)$. Тогда функция, которая каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие $z \in Z$ называется сложной функцией $z = g(f(x))$.

Определение 4. Пусть обратная функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, а область ее значения есть Y. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т.е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая обозначается $x = g(y)$ и называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Свойства обратных функций:

1. Область определения обратной функции совпадает с множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

2. Если $f(x)$ – монотонная функция, то обратная ей функция $g(x)$ также монотонна, причем если f – возрастающая функция, то и g – возрастающая, а если f – убывающая функция, то и g – убывающая.

3. График обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$ (биссектрисы 1-ого и 3-его координатных углов).

4. Для любого x, принадлежащего области определения функции $f(x)$, справедливо соотношение $g\big(f(x)\big) = x$; точно так же для любого x, принадлежащего области определения функции $g(x)$, справедливо соотношение $f\big(g(x)\big) = x$.

В третьем пункте раздела подробно описаны основные методы построения графиков функций: построения графиков функций по точкам; содержащих символ абсолютной величины; сложение и вычитание графиков функций.

В четвертом пункте раздела рассмотрены методы построения графиков сложных функций: с помощью линейных преобразований графика и свойств взаимно-обратных функций; «кружковый» метод; с использованием производной.

В пятом пункте данного раздела говорится о трудностях, которые возникают у учащихся при построении графиков функций.

Опыт экзаменов показывает, что у многих поступающих построение графиков функций вызывает большее или меньшее затруднения. Эти затруднения в значительной степени объясняются тем, что вопросы графического изображения функций в школьном курсе разбросаны по разным разделам, изучаются «кусками», а общие приемы построения графиков практически не рассматриваются.

Необходимо твердо знать определения и уметь выяснять такие общие свойства функций, как ограниченность, монотонность (участки возрастания и убывания функции), четность и нечетность, периодичность, уметь находить область изменения функции, ее нули, экстремальные значения и т.п.

Рассмотрим несколько примеров построения графиков сложных функций.

Пример 1. Построить график функции:

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \qquad (1)$$

Решение: прежде всего проведем некоторое тождественное преобразование второго слагаемого: $\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=$ $=\log_2|2x-1|=1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|$.

Теперь ясно, что областью определения функции y является множество $x>\frac{1}{2}$ (ибо второе слагаемое в формуле (1) имеет смысл при всех $x\neq\frac{1}{2}$, а первое лишь при $x>\frac{1}{2}$). Однако при $x>\frac{1}{2}$ справедливо равенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, и следовательно, в своей области определения (то есть при $x>\frac{1}{2}$ функция $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$ может быть записана в виде y $=1$. Таким образом, графиком функции (1) является луч $y=1, x>\frac{1}{2}$ (рисунок 1).

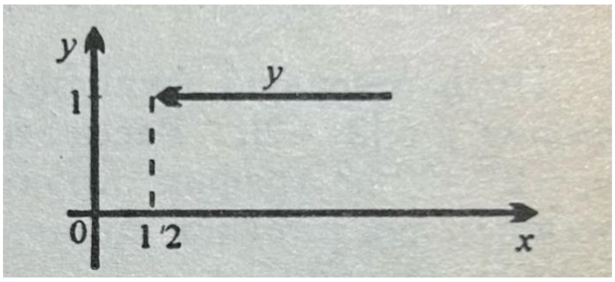

Рисунок 1 – График функции $y=$ $=log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)++log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$

Определенные трудности у поступающих вызывает построение графиков тех функциональных зависимостей, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины.

Общий прием построения графиков таких функций состоит в том, чтобы переписать выражение для функциональной зависимости, избавляясь от знака модуля. При этом, как правило, рассматриваемая функциональная зависимость на разных участках изменения аргумента описывается различными формулами. Естественно, что на каждом из таких участков построение графика нужно проводить по соответствующей формуле.

Пример 2. Построить график функции $y=2^{\frac{1}{x}}$.

Решение: здесь требуется построить график «функции от функции»; такие сложные функции на экзаменах встречаются довольно часто. Для построения графиков нужно хорошо знать свойства основных элементарных функций и ясно представлять себе вытекающие из них свойства комбинаций этих функций.

Областью определения рассматриваемой функции y являются все действительные числа, кроме $x = 0$. Так как при $x > 0$ показатель степени $\frac{1}{x} > 0$, то, по свойству показательной функции, $y > 1$ для всех положительных значений аргумента.

Заметим, что $y = 2$ при $x = 1$. Если x неограниченно возрастает, то выражение $\frac{1}{x}$ убывает к нулю, оставаясь положительным, а потому $2^{\frac{1}{x}}$ убывает к единице, оставаясь, однако, больше единицы (по свойству показательной функции). При положительном x стремящемся к нулю, показатель $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастает, и, следовательно, $2^{\frac{1}{x}}$ также неограниченно возрастает. Это позволяет нарисовать примерный вид графика функции y при $x > 0$. Можно, легко доказать, что на отрицательной полуоси абсцисс справедливо неравенство $0 < y < 1$. При помощи аналогичных рассуждений строится график функции y и при $x < 0$ (рисунок 2).

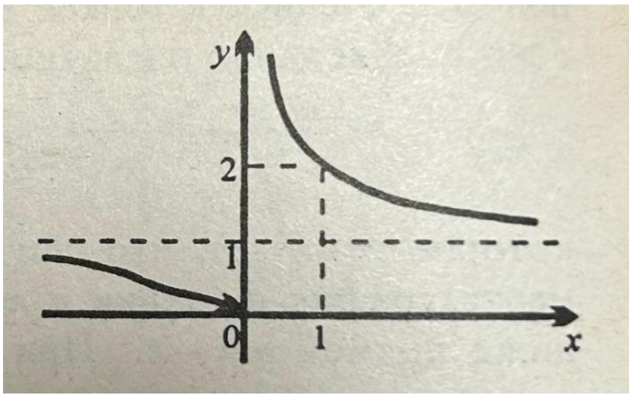

Рисунок 2 – График функции при $x > 0$

Второй раздел «Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа»: практические аспекты посвящен решению четвертой задачи бакалаврской работы.

В первом пункте данного раздела проводится анализ трех различных комплектов учебников по математике, а также методического пособия для учителя А. Г. Мордковича.

В учебниках алгебры разных авторов место изучения темы «Построение графиков сложных функций на уроках алгебры и начал анализа», как и его содержание различно. Анализ содержания темы «Построение графиков сложных функций» в учебниках А. Г. Мордковича, Ю. М. Колягина и А. Г. Мерзляка показал, что существует несколько подходов к определению понятия функции.

В комплекте учебников А. Г. Мордковича функциональная линия выбрана в качестве приоритетной. Это выражается, прежде всего, в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений не изучался, построение материала практически всегда осуществляется по схеме: функция – уравнения – преобразования.

В комплектах учебников А. Г. Мерзляка функциональная линия рассматривается в 7 классе после главы «Целые выражения», в 8 классе начинается изучаться еще в 1 главе «Рациональные выражения», а в 9 классе в главе 2 «Квадратичная функция».

В учебнике Ю. М. Колягина под изучение различных видов функций выделено несколько глав, как и у Мордковича А. Г. здесь рассматриваются степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции, а также построение их графиков.

Графики функций в материалах ЕГЭ по математике встречаются как НА базовом, так и профильном уровнях. В базовом уровне это задание 7 (анализ графиков и диаграмм), а в профильном – №7 (производная и первообразная) и №10 (графики функций).

Данные задания являются проблемными для учащихся в связи с многообразием форм формулировок, с необходимостью быть внимательным и решать задачу на конкретном числовом промежутке. Необходимость в исследованиях по теме «Построение графиков сложных функций» заключается в том, что в основном курсе алгебры и начал анализа на уроках отводится малое количество времени на объяснение данного материала, вследствие чего учащиеся показывают низкий процент выполнения заданий данного типа. На наш взгляд, задачный материал школьных учебников желательно дополнить заданиями на построение графиков сложных функций, что и будет сделано в пункте 2.2.

Во втором пункте приведены примеры построений графиков функций, а также предложен примерный учебно-тематический план элективного курса «Построение графиков сложных функций».

Цель курса – расширить и систематизировать знания учащихся по теме «Построение графиков сложных функций», создать условия для более осмысленного понимания теоретических сведений и применению их на практике.

Задачи курса: овладение системой знаний о методах построения сложных функций; формирование логического мышления учащихся.

Данный курс рассчитан на 30 часов (по 1 часу в неделю).

Учебно-тематический план представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Учебно-тематический план

№	Тема	Всего часов
1	**Методы построения графиков функций**	**7**
1.1	Построение графиков функций по точкам	3
1.2	Сложение и вычитание графиков функций	4
2	**Методы построения графиков сложных функций**	**22**
2.1	Построение графиков функций, содержащих символ абсолютной величины	4
2.2	Метод построения графиков сложных функций («кружковый)	4
2.3	Построение графиков сложных функций с помощью преобразований	4
2.4	Построение графиков сложных функций с помощью свойств взаимно-обратных функций	5
2.5	Построение графиков сложных функций с использованием производной	5
	Итоговое занятие	1
	Всего часов	**30**

Заключение. В результате выполнения бакалаврской работы получены следующие результаты.

1. В ходе анализа учебной и математической литературы рассмотрены основные понятия по теме исследования.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости xOy вида $(x;\ f(x))$, где x – любое число из области определения функции.

Пусть даны функции $z = g(y), y = f(x)$. Тогда функция, которая каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие $z \in Z$ называется сложной функцией $z = g(f(x))$.

2. Описаны основные методы построения графиков функций: по точкам; содержащих символ абсолютной величины; сложение и вычитание графиков функций; «кружковый» метод; с помощью преобразований и свойств взаимно-обратных функций; с использованием производной.

3. Выявлены трудности, возникающие у учащихся при построении графиков сложных функций.

Эти затруднения в значительной степени объясняются тем, что вопросы графического изображения функций в школьном курсе разбросаны по разным разделам, изучаются «кусками», а общие приемы построения графиков практически не рассматриваются.

4. Разработана серия задач по различным специфическим методам на уроках алгебры по теме «Построение графиков сложной функции».

Представленный в исследовании теоретический материал и рассмотренные примеры могут использоваться на уроках алгебры в 9 классе и на уроках алгебры и начал анализа в 10-11 классах.