МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

# Логарифмические уравнения и неравенства в курсе алгебры старшей школы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета
Карповой Александры Денисовны

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова
Зав. Кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2023

**Введение.** Согласно Примерной основной образовательной программе среднего общего образования с основными понятиями раздела «Алгебра и начала анализа» на базовом и углубленном уровне такими как: логарифм числа, свойства логарифма, десятичный логарифм, число е, натуральный логарифм, преобразование логарифмических выражений, логарифмические уравнения и неравенства, системы показательных и логарифмических уравнений, системы показательных и логарифмических неравенств учащиеся знакомятся в 10-11 классах на уроках алгебры и начала анализа.

Фундаментальное ядро содержания общего образования определяет, что школьное математическое образование способствует овладению универсальным математическим языком, универсальным для естественно-научных предметов, знаниями, необходимыми для существования в современном мире. Одной из главных целей математического образования является формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики.

Понятие логарифма и его приложений в школьной программе впервые встречается в старшей школе. Логарифмические уравнения и неравенства используются не только на уроках математики, но и в курсах высшей математики, в технических науках, информатике, физике, архитектуре, астрономии и т.д.

Изучением темы «Логарифмические уравнения и неравенства» в разные периоды времени занимались многие ученые математики (Д. Непер, Г. Бригс, В. М. Брадис, Н. Меркатор, И. Бюрги, Л. Эйлер).

Вопросы темы «Логарифмические уравнения и неравенства» рассматривали авторы всех существующих учебников (А. Г. Мордкович, С. М. Никольский, А. Ш. Алимов, Н. Я. Виленкин, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин и другие авторы).

Задания, связанные с решением логарифмических уравнений и неравенств, считаются одними из наиболее сложных у учащихся. В рамках школьного курса математики блоку тем, связанных с изучением логарифмических уравнений и неравенств, отводится не так много времени, обучение решению уравнений и неравенств довольно поверхностно, в связи с чем большинство учащихся, сталкиваясь на ЕГЭ по математике с заданиями, содержащими логарифмические уравнения и неравенства, просто пропускают их или не справляются с ними.

Все вышесказанное обосновывает актуальность темы исследования.

Цель бакалаврской работы – теоретически обосновать и практически разработать методические материалы по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

Задачи бакалаврской работы:

1) рассмотреть основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

2) выявить трудности, возникшие у учащихся при решении логарифмических уравнений и неравенств;

3) рассмотреть задания по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» в материалах ЕГЭ;

4) разработать методическое обеспечение по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ методико-математической и учебной литературы; разработка методического материала.

Структура бакалаврской работы: введение, два раздела («Логарифмические уравнения и неравенства в курсе алгебры старшей школы: теоретические аспекты», «Логарифмические уравнения и неравенства в курсе алгебры старшей школы: практические аспекты») заключение, список использованных источников.

**Основное содержание работы.** Первый раздел «Логарифмические уравнения и неравенства в курсе алгебры старшей школы: теоретические аспекты» посвящен решению первой и второй задач бакалаврской работы.

В первом пункте раздела говорится о логарифмических уравнениях, свойствах логарифма и логарифмической функции, а также более подробно описаны методы решения логарифмических уравнений, которые сопровождаются примерами решений логарифмических уравнений.

Определение 1. Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a$ – положительное число, отличное от единицы, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Также решая логарифмические уравнения, особое внимание уделяют некоторым свойствам логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел;

2. Область значений – множество всех действительных чисел;

Функция возрастает при $a > 0$ и убывает при $0 < a < 1$.

Методы решения логарифмических уравнений: применение определения логарифма; введение новой переменной; приведение к общему основанию; метод потенцирования; метод логарифмирования; функционально-графический метод; применение основного логарифмического тождества.

Исходя из вида логарифмического уравнения применяется подходящий метод решения. Однако это не означает, что при решении может быть использован лишь один метод решения логарифмических уравнений. Как уже отмечалось ранее, в основе многих методов решения логарифмических уравнений лежит использование свойств логарифма.

Во втором пункте раздела говорится о логарифмических неравенствах, свойствах логарифмической функции, необходимых для решения данных неравенств, а также описаны методы решения логарифмических неравенств, причем каждый из методов сопровождается примером решения логарифмического неравенства.

Определение 2. Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a$ – положительное число, отличное от единицы, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Примерами логарифмических неравенств служат неравенства вида:

$log_a f(x) > b,\ log_a f(x) > log_a g(x)$, где $a > 0,\ a \neq 1$. (1)

Все неравенства, сводящиеся к виду (1), также будут считаться логарифмическими.

Решая логарифмические неравенства, пользуются некоторыми свойствами логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел;

2. Область значений – множество всех действительных чисел;

3. Функция возрастает при $a > 1$ , то есть если $0 < x_1 < x_2$, то $log_a x_1 <$ $< log_a x_2$; функция убывает при $0 < a < 1$, то есть если $0 < x_1 < x_2$, то $log_a x_1 > log_a x_2$. Верно и обратное – если $log_a x_1 < log_a x_2$, то при $a > 1$ переходим к неравенству $0 < x_1 < x_2$, а при $0 < a < 1$ переходим к неравенству $x_1 > x_2 > 0$.

4. $log_a x_1 = log_a x_2$ при условии, что $x_1 = x_2$, где $x_1, x_2$ положительные.

Методы решения логарифмических неравенств: классический метод; графический метод; метод рационализации; метод замены переменных.

В третьем пункте данного раздела говорится о трудностях, которые возникают у учащихся при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Есть несколько наиболее распространенных трудностей, которые возникают у учащихся.

Самая распространенная ошибка заключается в том, что учащиеся нарушают равносильность, используют преобразования, без дополнительных пояснений при решении уравнений и неравенств, что приводит к потере корней и появлению посторонних корней, которые ученики записывают в ответ, но если сделать проверку, то данной ошибки можно избежать.

Учащиеся допускают множество ошибок, когда начинают решать уравнение или неравенство и забывают найти область определения, а ведь в ряде случаев она и есть ключ к решению.

Типичной ошибкой учащихся является то, что они не владеют на нужном уровне определениями понятий, формулами, формулировками теорем и алгоритмами.

Многие ошибки, допускаемые при решении уравнений и неравенств, являются следствием того, что учащиеся очень часто пытаются решать задачи по шаблону, т.е. привычным путем.

Второй раздел «Логарифмические уравнения и неравенства в курсе алгебры старшей школы: практические аспекты» посвящен решению третьей и четвертой задач бакалаврской работы.

В первом пункте данного раздела проводится анализ четырех различных учебников по математике: Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа, 10 класс; Мерзляк А. Г. Алгебра и начало математического анализа, 11 класс; Колмогоров А. Н. Алгебра и начало математического анализа, 11 класс; Виленкин Н. Я. Алгебра и начало математического анализа, 11 класс.

Проведенный анализ показывает, что в рассмотренных школьных учебниках введение основных понятий и методы решения логарифмических уравнений и неравенств – схожи между собой. Отличается только учебник А. Н. Колмогорова, где определение отсутствует и сразу приводятся примеры решений уравнений (неравенств). Для подготовки к ЕГЭ по глубине теоретического материала и разноуровневых заданий можно выделить учебники А. Г. Мерзляка и А. Г. Мордковича.

Во втором пункте данного раздела рассматриваются логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ и даны их решения.

Рассмотрим примеры типовых заданий, встречающихся в материалах ЕГЭ по данной теме:

Задание № 1. Найдите корень уравнения $\log_3(2-x) = \log_9 16$.

Решение. Перейдем к логарифмам по одному основанию, используя свойства логарифма: $\log_3(2-x) = \log_{3^2} 16$, $\log_3(2-x) = \frac{1}{2}\log_3 16$, $\log_3(2-x) = \log_3 16^{\frac{1}{2}}$, отсюда получаем уравнение, не содержащее логарифмы: $2-x = 4$, $-x = 4-2$, $-x = 2, x = -2$.

Ответ: $x = -2$.

Задание № 2. Решите неравенство: $\log_5^2 x^4 - 28\log_{0,04} x^2 \leq 8$.

Решение. Преобразуем неравенство: $\log_5^2 x^4 - 28\log_{\frac{4}{100}} x^2 - 8 \leq 0$, $\log_5^2 x^4 - 28\log_{\frac{1}{25}} x^2 - 8 \leq 0$, $\log_5 x^4 \times \log_5 x^4 - 28\log_{5^{-2}} x^2 - 8 \leq 0$, используем свойства логарифма: $16\log_5^2 x + 28\log_5 x - 8 \leq 0$. Произведем замену переменной, пусть $y = \log_5 x$, $16y^2 + 28y - 8 \leq 0$, $4y^2 + 7y - 2 \leq$ $\leq 0$, $4y^2 + 7y - 2 = 0$, $\sqrt{D} = 9, y_1 = -2$, $y_2 = \frac{1}{4}$ , $4\left((y + +2)\left(y - \frac{1}{4}\right)\right) \leq 0$ (Рисунок 1).

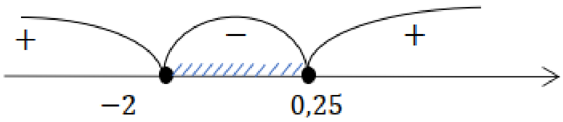


Рисунок 1 – Метод интервалов

$y \in [-2;\ 0{,}25]$.

Так как $y = \log_5 x$, то получаем:

$$\begin{cases} y \geq -2, \\ y \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x \geq -2, \\ \log_5 x \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x \geq \log_5 5^{-2}, \\ \log_5 x \leq \log_5 5^{\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

Отсюда следует: $\begin{cases} x \geq 5^{-2} \\ x < 5^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}04, \\ x \leq \sqrt[4]{5} \end{cases}$ (Рисунок 2).

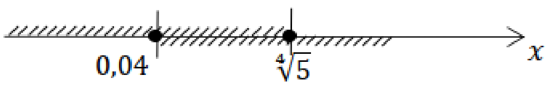


Рисунок 2 – Решение системы $\begin{cases} x \geq 0{,}04, \\ x \leq \sqrt[4]{5}. \end{cases}$

Ответ: $[0{,}04; \sqrt[4]{5}]$.

Тема «Логарифмические уравнения и неравенства» занимает особое место в материалах ЕГЭ. Она подтверждена и спецификацией, и кодификатором. При решении логарифмических уравнений и неравенств учащиеся часто совершают разнообразные ошибки, например, ошибки, связанные с заменой переменной; ошибки, связанные с графическим решением; невнимание к области определения и др.

В третьем пункте данного раздела говорится о решении логарифмических уравнений и неравенств с параметром, а также предложена серия задач для дополнительных занятий по подготовке к ЕГЭ.

Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Это связано с тем, что в школе стараются развить умения и навыки решения определенного набора стандартных задач, связанных часто с техникой алгебраических преобразований.

При решении логарифмических уравнений с параметрами необходимо придерживаться следующей схемы: найти область допустимых значений; решить уравнение (чаще всего выразить $x$ через $a$); сделать перебор параметра $a$ с учетом ОДЗ; проверить, удовлетворяют ли найденные корни уравнения условиям области допустимых значений; записать ответ.

Задание №3. При каких значениях параметра $a$ все корни уравнения $(a-1)log_3^2(x-2)+2(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$ меньше 3?

Решение. Область допустимых значений переменной х это $x>2$. А так как по условию все корни уравнения должны быть меньше 3, то есть $x<3$, то $x-2<1$. Значит, $\log_3(x-2)<0$. Если обозначить $y=\log_3(x-2)$, то уравнение перепишется в виде равносильной системы $\begin{cases}(a-1)y^2+2(a+1)y+a-3=0, \\ y<0.\end{cases}$

При $a=1$ уравнение принимает вид $4y-2=0$, и т. о. $y=\frac{1}{2}$. Но это значение $y$ противоречит условию $y<0$. Пусть $a\neq 1$. Тогда корни квадратного трехчлена $f(y)=(a-1)y^2++2(a+1)y+a-3$ будут меньше 0, если совместна система $\begin{cases} D\geq 0 \\ y_b<0 \\ (a-1)f(0)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq\frac{1}{3} \\ \frac{a+1}{a-1}>0 \\ (a-1)(a-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow a>3.$

Ответ: $a>3$.

Задание № 4. При каких значениях параметра $a$ сумма квадратов корней уравнения $2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0,5}(x^2+ax-2a^2)=0$ больше 1?

Решение: $\log_2(2x^2 - x + 2a - 4a^2) = \log_2(x^2 + ax - 2a^2)$.

$$\begin{cases} 2x^2 - x + 2a - 4a^2 = x^2 + ax - 2a^2 \\ x^2 + ax - 2a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1+a)x + 2a(1-a) = 0 \\ (x+2a)(x-a) > 0 \end{cases}$$

$x^2 - (1+a)x + 2a(1-a) = 0, x_1 = 1 - a, x_2 = 2a.$

$x_1 = 1 - a, (1 - a + 2a)(1 - a - a) > 0, (1 + a)(1 - 2a) > 0, a \in (-1; \frac{1}{2})$

$x_2 = 2a, (2a + 2a)(2a - a) > 0, 4a \times a > 0, a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$

Уравнение имеет два корня, если $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$ (*)

Учитывая, что $x_1^2 + x_2^2 > 1$, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1 + a)^2 - -2 \times 2a \times (1 - a) = 5a^2 - 2a + 1.$

$5a^2 - 2a + 1 > 1,\ 5a^2 - 2a > 0, a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{5};\ \infty)$.(**)

Пересечем множества (*) и (**), получим ответ.

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (\frac{2}{5}; \frac{1}{2})$.

Задание № 5. Для каждого значения параметра $a$ решите уравнение $\log_8(x^2 - 1) = \log_8(2ax - a^2)$.

Решение: данное уравнение равносильно следующей системе:
$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2ax - a^2, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a - 1, \\ x = a + 1 \end{array}\right. \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

$x = a - 1$ удовлетворяет такому условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $x = a + 1$ удовлетворяет условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если $a \in\ (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ (рисунок 3).

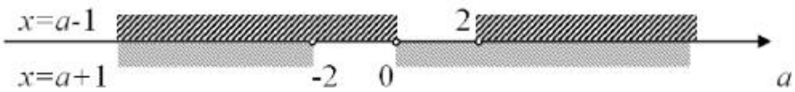


Рисунок 3 – Решение неравенства

Итак, видим, что при $a < -2$ и $a > 2$ уравнение имеет два корня: $x = a - -1, x = a + 1$; при $-2 \le a < 0$ уравнение имеет один корень: $x = a - 1$; при $a = = 0$ корней нет; при $0 < a \le 2$ уравнение имеет один корень $x = a + 1$.

Ответ: при $a < -2$ и $a > 2$ $x = a - 1$ или $x = a + 1$; при $-2 \le a < 0$ $x = = a - 1$; при $a = 0$ корней нет; при $0 < a \le 2$ $x = a + 1$.

Задание № 6. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\log_3(x+|x|)=\log_3 y,\\ x^2-ay+6a-8=0\end{cases}$ имеет два различных решения.

Решение: из условия существования логарифма следует: что $x+|x|>0$, что выполнимо только при $x>0$. Тогда, имеем: $\begin{cases}x>0,\\ \log_3 2x=\log_3 y,\\ x^2-ay+6a-8=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ 2x=y,\\ x^2-ay+6a-8=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ 2x=y,\\ x^2-2ax+6a-8=0.\end{cases}$

Исходная система имеет два решения, если квадратное уравнение $x^2-2ax+$ $+6a-8=0$ имеет два различных положительных корня. Пусть $x_1$ и $x_2$ – различные корни этого уравнения, причем $x_1>0$ и $x_2>0$; по теореме Виета $x_1x_2=6a-8, x_1+x_2=2a$. Кроме того, $D_1=a^2-(6a-8)$. Условие задачи выполняется, если $\begin{cases}D_1>0,\\ x_1x_2>0\\ x_1+x_2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}a^2-6a+8>0,\\ 6a-8>0,\\ 2a>0;\end{cases}$ $\begin{cases}a\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty),\\ a\in\left(\frac{4}{3};+\infty\right),\\ a\in(0;+\infty);\end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $a\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup(4;+\infty)$.

**Заключение.** В результате выполнения бакалаврской работы получены следующие результаты.

1. Рассмотрены основные понятия и методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a$ – положительное число, отличное от единицы, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, где $a$ – положительное число, отличное от единицы, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Методы решения логарифмических уравнений: применение определения логарифма; введение новой переменной; приведение к общему основанию;

метод потенцирования; метод логарифмирования; функционально-графический метод; применение основного логарифмического тождества.

Методы решения логарифмических неравенств: классический подход; графический метод; метод рационализации; метод замены переменных.

2. Выявлены трудности, возникающие у учащихся при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Трудности, возникающие при решении логарифмических уравнений и неравенств, чаще всего связаны с ошибками, которые ученики допускают в ходе решения заданий.

Самая распространенная ошибка заключается в том, что учащиеся нарушают равносильность, используют преобразования, без дополнительных пояснений при решении уравнений и неравенств, что приводит к потере корней и появлению посторонних корней; учащиеся допускают множество ошибок, когда начинают решать уравнение или неравенство и забывают найти область определения; типичной ошибкой учащихся является то, что они не владеют на нужном уровне определениями понятий, формулами, формулировками теорем и алгоритмами; многие ошибки, допускаемые при решении уравнений и неравенств, являются следствием того, что учащиеся очень часто пытаются решать задачи по шаблону, т.е. привычным путем.

3. Рассмотрены задания по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» в материалах ЕГЭ.

Тема «Логарифмические уравнения и неравенства» занимает особое место в материалах ЕГЭ. Она подтверждена и спецификацией, и кодификатором. При решении логарифмических уравнений и неравенств учащиеся часто совершают разнообразные ошибки, например, ошибки, связанные с заменой переменной; ошибки, связанные с графическим решением; невнимание к области определения и др.

4. Разработана серия задач с параметром по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» которые можно решать на дополнительных занятиях по подготовке к ЕГЭ в 10-11 классе.