МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Решение тригонометрических уравнений в школьном курсе математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Арнаевой Миланы Алдаровны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2023

Введение. Владение приемами решения тригонометрических уравнений – одно из основных требований к предметным результатам освоения математики в рамках Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (ФГОС С(П)ОО). Тема «Тригонометрические уравнения» считается одной из самых сложных в математике. Это обусловлено множеством формул, периодичностью функций, бесконечным множеством корней уравнений, большим количеством методов решения. Решение тригонометрических уравнений побуждает учащихся к творческой деятельности, аналитическим способностям, логическим обоснованиям, доказательным рассуждениям.

Эффективность обучения решению тригонометрических уравнений зависит от методики обучения и от подбора системы задачного материала. Методике обучения решению тригонометрических уравнений посвящены работы Е.С. Березанской, И.Т. Бородули, Б.М. Ивлева, А.П. Карпа, А.Н.Колмогорова, Ю.М. Колягина, А.Г. Мордковича и др.

Теме «Тригонометрические уравнения» посвящены диссертационные работы Г. И. Бржозовского (1967 г.), О.В. Захаровой (2010 г.), А.Н. Марасанова (2012г.), Б.Б. Молоткова (2014г.), С.Н. Суханова (2002г.) и др.

Цель бакалаврской работы: обобщить теоретический материал по теме «Тригонометрические уравнения и методы их решения» и разработать методические рекомендации для обучения решению тригонометрических уравнений.

Задачи бакалаврской работы:

1. Рассмотреть содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения».

2. Проанализировать содержание школьных учебников по теме «Тригонометрические уравнения и методы их решения».

3. Проанализировать материалы ЕГЭ по математике (профильный уровень) и выявить наиболее часто встречающиеся типы заданий по решению тригонометрических уравнений.

4. Разработать методические материалы для подготовки школьников к решению тригонометрических уравнений на ЕГЭ.

Методы исследования: анализ методико-математической литературы и учебной литературы; изучение нормативных документов; разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: титульный лист, содержание, введение, два раздела основной части («Изучение тригонометрических уравнений в школьном курсе математики: теоретические аспекты», «Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первом разделе «Изучение тригонометрических уравнений в школьном курсе математики: теоретические аспекты» решались первая и вторая задачи бакалаврской работы. Рассмотрено содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения».

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида:

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

В таких уравнениях переменная находится под знаком тригонометрической функции, a – данное число.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Существует два основных метода решения тригонометрических уравнений:

1) метод разложения на множители может использоваться для решения тригонометрических уравнений, которые имеют вид произведения двух или более тригонометрических функций. Такие уравнения можно записать в виде:

$$f(x) \cdot g(x) = 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – тригонометрические функции, или сводятся к такому виду. Для того, чтобы решить уравнения данным методом необходимо:

1. Представить тригонометрическое уравнение в виде произведения.
2. Решить совокупность уравнений.
3. Найти объединение полученных решений. Записать ответ.

Пример. Решить уравнение: $\sin 2x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$.

Решение. Используем формулу синуса двойного угла и переносим все слагаемые в левую часть:

$$2\sin x\cos x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0.$$

Группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвёртым:

$$2\sin x\,(\cos x + 1) - \sqrt{3}(\cos x + 1) = 0.$$

Выносим за скобки общий множитель $\cos x + 1$:

$$(\cos x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Решение полученного уравнения сводится к решению совокупности двух простейших уравнений:

1) $\cos x + 1 = 0$

$$\cos x = -1$$

$$x_1 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) метод замены переменной – заключается в следующем: в искомом уравнении одну из тригонометрических функций или целое выражение заменяют на t и сводят к алгебраическому уравнению. Однако замена не всегда сразу видна, и уравнение нужно сначала преобразовать. Данным методом решаются следующие виды уравнений: однородные уравнения; уравнения, решаемые с помощью введения вспомогательного угла; уравнения, сводящиеся к квадратным; уравнения вида $f(\sin nx \pm \sin mx) = 0, f(\cos nx \pm \cos mx) = 0$;

уравнения вида $f(\sin nx \times \sin mx) = 0, f(\cos nx \cdot \cos mx) = 0$; уравнения, решаемые с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

Согласно Федеральному перечню учебников на базовом уровне к использованию при реализации образовательных программ среднего общего образования в 2022-2023 учебном году допущен только учебник Алимова Ш. А. и Колягина Ю. М. «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов. В нем изложение темы начинается с решения простейших тригонометрических уравнений по определению (с помощью единичной окружности), на которые отводятся три параграфа, после каждого из которых приведена система упражнений. Далее вводятся понятия арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа. Позже предлагаются общие формулы для нахождения корней простейших тригонометрических уравнений.

Дальше рассматриваются решение трех видов тригонометрических уравнений: уравнения, сводящиеся к квадратным, уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ (включающие однородные уравнения как частный вид) и уравнения, решаемые разложением левой части на множители. Приведены методы решения уравнений: метод разложения на множители, метод введения вспомогательного аргумента.

Во втором разделе «Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики» решались третья и четвертая задачи бакалаврской работы.

В ходе анализа материалов ЕГЭ по математике (профильный уровень) за последние 5 лет выявлено, что тригонометрические уравнения встречаются в задании №12. Это задание является первым в развернутой части контрольных измерительных материалов ЕГЭ на протяжении многих лет и меняется только его порядковый номер. Для решения тригонометрического уравнения необходимы следующие базовые знания и умения:

1) решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a, \cos x = a, \tan x = a, \cot x = a.$$

2) знание основных тригонометрических формул и умение их применять для преобразования выражений;

3) умение выполнять алгебраические преобразования (вынесение общего множителя, группировка слагаемых, решение квадратных и приводящихся к ним алгебраических уравнений).

Особое внимание следует уделить формулам двойного угла, основного тригонометрическое тождество и формулам приведения. Навыки преобразований с использованием этих формул у школьников обычно сформированы еще в 10 классе и требуют лишь актуализации. Необходимо уделить внимание выводу формул приведения с помощью правила, а не путем заучивания, поскольку в реальных условиях ЕГЭ вероятна ошибка воспроизведения конкретной формулы.

Также во втором разделе нами разработаны для подготовки школьников к ЕГЭ по теме «Решение тригонометрических уравнений» следующие методические материалы: (1) методические рекомендации по решению тригонометрических уравнений; (2) система заданий по теме исследования; (3) интерактивное упражнение «Тренажер отбора корней тригонометрических уравнений на единичной окружности».

Процесс формирования у школьников умений решать тригонометрические уравнения рекомендуется начать с формирования у них умения использовать тригонометрический круг или график функции для решения уравнения, познакомить учащихся с применением свойств тригонометрических функций для решения простейших уравнений вида $\sin x = 1, \cos x = 1, \operatorname{tg} x = 0$ и т.п.

Реализовать этот этап можно, например, в процессе систематизации знаний школьников о свойствах тригонометрических функций. Основным средством могут служить задания, предлагаемые учащимся и выполняемые либо под руководством учителя, либо самостоятельно.

Приведем примеры таких заданий:

Задание 1. Найдите все числа отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, для которых верно:

а)$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = \frac{1}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = 0$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = 0$;

в) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = 1$;

г) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg} x = 1, \operatorname{ctg} x = 0$.

Задание 2. отметьте на единичной окружности точки t, для которых соответствующие значения t удовлетворяют равенству:

а) $\sin t = -\frac{1}{2}$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Кроме того, следует освоить методы решения тригонометрических уравнений. Для этого можно продемонстрировать школьникам возможность применения различных приёмов решения к одному и тому же уравнению, а также выделить прием, который является наиболее рациональным в данной ситуации.

Для отработки навыка решения тригонометрических уравнений, применяя различные методы, ученикам могут быть предложены следующие задания:

1. Решите уравнения, с помощью разложения на множители:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;

2) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

3) $3\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$;

4) $\cos(2x) - \sin x = 0$;

5) $\cos x\,(3\operatorname{tg} x - 5) = 0$.

6) $4\cos x \sin x + 2\cos x + 2\sin x + 1 = 0$.

2. Решите уравнения, с помощью замены переменной:

1) $\sin x + \cos(2x) = 0$;

2) $2\sin x - \cos(2x) = 1$;

3) $\sin(2x) + 2\cos x = 0$;

4) $\sin(2x) + \cos(2x) = 1$;

5) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$;

6) $3\cos^2 x = 7(\sin x + 1)$.

Помимо этого, одним из важных навыков является умение отбирать корни, принадлежащие заданному отрезку. Отбор корней тригонометрического уравнения – это процесс определения значений переменной, которые удовлетворяют уравнению в заданном интервале. Существует несколько способов отбора корней, включая арифметический, алгебраический, геометрический и функционально-графический.

В рамках бакалаврской работы нами было разработано интерактивное упражнение «Тренажер отбора корней тригонометрических уравнений на единичной окружности» (рисунок 1), реализованное на платформе WorldWall.

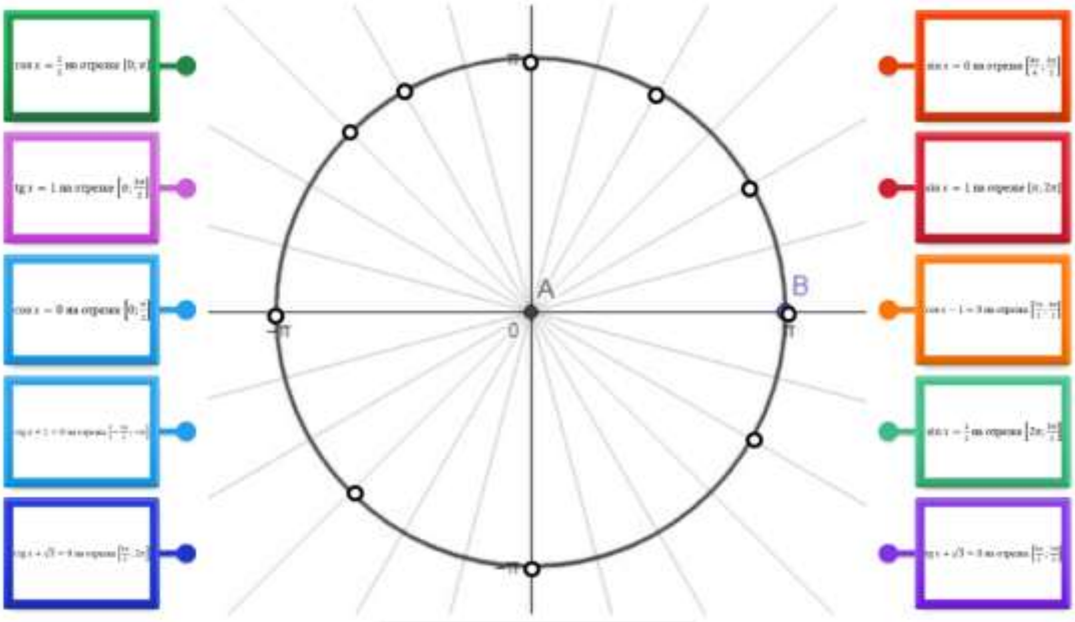

Рисунок 1

В данном упражнении пользователю предлагается на единичной (тригонометрической) окружности отметить в какой точке находится корень тригонометрического уравнения на заданном отрезке. Упражнение позволяет отработать навык отбора корней тригонометрических уравнений на заданном интервале и повысить понимание геометрического смысла корней тригонометрических уравнений.

Кроме того, важно знать, как правильно оформлять решение тригонометрического уравнения, чтобы получить максимальное количество баллов. Для правильного оформления необходимо указывать все промежуточные действия и обращать внимание на четкость и логичность изложения.

Эксперты ЕГЭ отмечают, что при решении заданий с тригонометрическими уравнениями очень часто допускаются типичные ошибки, которые могут существенно снижать баллы за задание: неверное вычисление обратной тригонометрической функции; неточности в формулах корней уравнений; незнание множества значений тригонометрических функций синуса и косинуса; незнание определений $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; незнание множества значений тригонометрических функций тангенса и котангенса; неверно записаны тригонометрические формулы; неверное вычисление корней, принадлежащих данному промежутку; потеря корней на промежутке при переходе от общей формулы корней к двум формулам частного вида.

В целом, для успешного решения тригонометрических уравнений необходимо уверенно владеть теорией тригонометрии, знать типичные ошибки и уметь точно отбирать корни. Кроме того, очень важно вести работу аккуратно и не допускать неточностей при переходе от одного этапа решения к другому.

Чтобы избежать ошибок при решении тригонометрических уравнений, абитуриентам следует внимательно изучать теорию и практиковать решение задач разной сложности, использовать таблицы значений тригонометрических функций и контролировать каждый шаг решения, чтобы исключить возможность допущения ошибки. Также полезно обращаться за помощью к преподавателю. А на самом экзамене самое главное быть внимательным и всё перепроверять.

Рекомендуем предложить учащимся тригонометрические уравнения для самостоятельного решения:

1. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \operatorname{tg} x - 5 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

4. а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5. а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 - 1$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

6. а) Решите уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

8. а) Решите уравнение $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = \cos 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Заключение. Основные выводы бакалаврской работы:

1. В ходе анализа научной, методической и учебной литературы рассмотрено содержание темы «Тригонометрические уравнения и методы их решения». Для тригонометрических уравнений существует два основных алгебраических метода решения: метод разложения на множители и метод замены переменной. Методом замены переменной решаются: однородные уравнения; уравнения, решаемые с помощью введения вспомогательного угла; уравнения, сводящиеся к квадратным; уравнения вида $f(\sin nx \pm \sin mx) = 0, f(\cos nx \pm \cos mx) = 0$; уравнения вида $f(\sin nx \times \sin mx) = 0, f(\cos nx \cdot \cos mx) = 0$; уравнения, решаемые с помощью универсальной

тригонометрической подстановки. Каждый тип уравнения имеет свои особенности и требует индивидуального подхода при решении. Важно также отметить, что знание различных типов тригонометрических уравнений является необходимым для успешного решения более сложных задач.

2. Из анализа содержания учебника Алимова Ш. А., Колягина Ю. М. «Алгебра и начала математического анализа» установлено, что система упражнений в учебнике содержит большое количество тригонометрических уравнений, что позволяет закрепить полученные знания и навыки, а также тренировать учеников в решении различных типов тригонометрических уравнений. Это может быть полезно как для подготовки к контрольным и экзаменам, так и для развития аналитического мышления и логического вывода.

3. Из анализа материалов ЕГЭ по математике (профильный уровень) выявлено, что за последние 5 лет задание с решением тригонометрических уравнений оставалось неизменным, что подчеркивает его важность и актуальность. Умение решать тригонометрические уравнения является необходимым навыком для успешной сдачи ЕГЭ по математике в профильном классе.

4. Разработаны методические материалы для подготовки школьников к решению тригонометрических уравнений на ЕГЭ, включающие в себя методические рекомендации, серию заданий, интерактивное упражнение.

Практическая значимость: методические материалы могут быть полезны для учителей и учеников путем использования их в образовательном процессе для повышения качества подготовки учеников к решению тригонометрических уравнений на ЕГЭ.

Таким образом, изучение тригонометрических уравнений является важным элементом обучения математике, и позволяет овладеть важными навыками аналитического мышления и логического вывода.