МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ

Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Системы алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Алайцевой Екатерины Вячеславовны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2023

Введение. В Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) указано, что предметные результаты области «Математика» должны обеспечивать: (1) на базовом уровне – умение оперировать понятиями (уравнение с одной переменной, линейное уравнение, квадратное уравнение); умение решать системы двух линейных уравнений; умение использовать координатную прямую и координатную плоскость для изображения решений уравнений и систем; (2) на углубленном уровне – умение свободно оперировать понятиями (уравнение с одной переменной, линейное уравнение, квадратное уравнение); умение решать линейные и квадратные уравнения, системы линейных и квадратных уравнений; умение составлять и решать уравнения и их системы (в том числе с ограничениями, например, в целых числах) при решении математических задач, задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение решать уравнения и системы графическим методом; знакомство с уравнениями с параметром.

В примерной образовательной программе освоение линии «Уравнения и неравенства» на уровне ООО должно обеспечивать достижение следующих предметных образовательных результатов:

1. Решать линейные уравнения с одной переменной, применяя правила перехода от исходного уравнения к равносильному ему. Проверять, является ли число корнем уравнения;

2. Применять графические методы при решении линейных уравнений и их систем;

3. Решать текстовые задачи алгебраическим способом с помощью составления уравнения или системы двух уравнений с двумя переменными;

4. Проводить простейшие исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений;

5. Решать линейные, квадратные уравнения и рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы двух уравнений с двумя переменными.

Вопросами по теме «Системы алгебраических уравнений» занимались авторы всех школьных учебников алгебры (Макарычев Ю.Н., Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Башмаков М.И., Никольский С.М. и др.), авторы учебных пособий (Белый Е.К., Дорофеева Ю.А., Федюков А.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. и др.).

Цель бакалаврской работы – теоретически описать содержание темы «Системы алгебраических уравнений и методы их решения» и разработать методическое обеспечение обучения решению систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы.

Задачи бакалаврской работы:

1. Систематизировать материал по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

2. Описать основные методы решения систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы.

3. Проанализировать содержание школьных учебников по теме «Системы алгебраических уравнений».

4. Рассмотреть олимпиадные задачи по теме «Системы алгебраических уравнений».

5. Разработать систему задач по теме исследования.

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ математической, методической, учебной литературы, разработка методических материалов.

Структура бакалаврской работы: введение, два раздела основной части («Теоретические аспекты обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы», «Методические аспекты обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы»), заключение, список использованных источников, приложение.

Основное содержание работы. В первом разделе «Теоретические аспекты обучения теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы» решались первая и вторая задачи бакалаврской работы. Рассмотрены основные понятия: алгебраическое уравнение, линейное уравнение (с одним и несколькими неизвестными), квадратное уравнение, система уравнений, решение системы уравнений, классификация систем по количеству решений, равносильность систем, однородные системы, симметрические системы.

Определение 1. Алгебраическим уравнением называют уравнение, в левой части которого находится многочлен степени $n \geq 0$, а в правой – ноль.

Определение 2. Если требуется найти все пары, тройки и т.д. чисел, являющихся решением всех данных уравнений, то множество этих систем уравнений называют *системой уравнений*.

Определение 3. Решением системы называется такая совокупность значений неизвестных, входящих в данную систему, которая, будучи подставлена вместо неизвестных в уравнения системы, обращает каждое из них в числовое равенство (или тождество, если уравнения содержат буквенные выражения, которые считаются известными). Нужно при этом помнить, что хотя бы в совокупность значений неизвестных, дающую решение системы, входит столько чисел (выражений) сколько имеется неизвестных ($n \geq 2$), но такая совокупность принимается за одно решение.

<u>Классификация систем по количеству решений:</u>

А) системы, имеющие одно и только одно решение называются *определенными*;

Б) системы, не имеющие ни одного решения называются *противоречивыми* или *несовместными*. Системы, имеющие хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Для каждой системы уравнений можно говорить о *множестве всех решений*. Для несовместной системы множество решений – пустое множество.

В) системы, имеющие более одного решения называются *неопределенными*.

Определение 4. Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнение, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа. Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях уравнения, называют членами уравнения.

Определение 5. Линейным уравнением от n неизвестных называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где $a_{1,}$ $a_2, \cdots a_n, b$ – данные действительные числа .

Определение 6. Уравнение вида $ax^2 + b\ x + c$ =0, где a, b, c – некоторые числа числа, причем $a \neq 0$ называют квадратным.

Определение 7. Две системы называются *равносильными* или *эквивалентными*, если любое решение первой системы является также решением второй системы и, обратно, всякое решение второй системы будет также решением первой системы.

Определение 8. Если в системе все свободные члены равны нулю, то система называется *однородной*. Особенность такой системы состоит в том, что она всегда совместна, так как ей безусловно удовлетворяет решение, состоящее из нулевых значений неизвестных; это очевидное решение кратко называют *нулевым*. Если однородная система – определенная, то нулевое решение является единственным ее решением; если же однородная система – неопределенная, то она наряду с нулевым содержит также по крайней мере еще одно ненулевое решение (т.е. такое решение, которое имеет в своем составе хотя бы одно число, отличное от нуля).

Определение 9. Выражение $F(x; y)$ называется *симметрическим*, если оно при замене переменных x на y, y на x не изменится. Основными симметрическими многочленами с двумя переменными считаются $x + y$ и xy. Все остальные симметрические многочлены с двумя переменными могут быть выражены через основные.

Определение 10. Система, все уравнения которой симметрические, называется *симметрической*. Ее можно решить методом замены переменных, выбрав в качестве новых переменных основные симметрические многочлены.

Также рассмотрены методы решения систем алгебраических уравнений:

Метод подстановки. Метод заключается в том, что из одного уравнения системы одну из переменных выражают через другую, затем полученное выражение подставляют во второе уравнение системы и решают его относительно оставшейся переменной. «Выразить переменную» означает преобразовать равенство так, чтобы эта переменная осталась слева от знака равенства с коэффициентом 1, а все остальные слагаемые перешли в правую часть равенства. Найдя корни последующего уравнения, ищут соответствующие значения выраженной переменной.

Метод алгебраического сложения. Суть метода заключается в том, чтобы уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных (при необходимости), затем сложить (вычесть) уравнения, решить полученное уравнение с одной переменной, найти неизвестное, далее подставить найденное во втором шаге значение переменной в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное и записать ответ.

Графический метод. Заключается в построении графика каждого уравнения, входящего в данную систему, в одной координатной плоскости и нахождении точки пересечения этих графиков. Координаты этой точки $(x; y)$ и будут являться решением данной системы уравнений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m}. \end{cases} \tag{1}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности треугольному) виду.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \quad\quad a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \tag{2}$$

где $k \leq n, a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,k}.$

Коэффициенты a_{ii} называются главными элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Во втором разделе «Методические аспекты изучения систем алгебраических уравнений в курсе алгебры основной школы» решались третья, четвертая и пятая задачи бакалаврской работы.

Был проведен анализ школьных учебников для 7-9 классов Ю. Н. Макарычева, рассмотрены и решены олимпиадные задачи по теме исследования и разработаны системы задач по темам: «Системы линейных уравнений», «Системы квадратных уравнений», «Системы уравнений как модели реальных ситуаций», составленные с учётом основных методов решения систем алгебраических уравнений. Приведем примеры из системы задач по теме «Системы уравнений как модели реальных ситуаций».

Задача 1. В седьмом классе в понедельник не пришли в школу одна девочка и пять мальчиков. При этом число девочек в классе оказалось в 2 раза больше числа мальчиков. Во вторник не пришли один мальчик и девять девочек. В среду на уроке пришли все ученики. Сколько школьников присутствовало на уроках в среду в седьмом классе?

Решение. <u>Первый этап.</u> *Составление математической модели*

Пусть x – число девочек, y – число мальчиков в седьмом классе.

В понедельник было $(x - 1)$ девочек, $(y - 5)$ мальчиков. При этом оказалось, что девочек вдвое больше, т. е.

$$x - 1 = 2\,(y - 5).$$

Во вторник было $(x - 9)$ девочек, $(y - 1)$ мальчиков. При этом оказалось, что мальчиков в 1,5 раза больше, т. е.

$$y - 1 = 1{,}5\,(x - 9).$$

Математическая модель ситуации составлена:

$$\begin{cases} x - 1 = 2\,(y - 5), \\ y - 1 = 1{,}5(x - 9). \end{cases}$$

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью*

Сначала упростим каждое уравнение системы.

Для первого уравнения имеем:

$$x - 1 = 2(y - 5);$$

$$\mathrm{x} - 1 = 2y - 10;$$

$$\mathrm{x} - 2y + 9 = 0.$$

Для второго уравнения имеем:

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9);$$

$$2(y - 1) = 3(x - 9)$$

(обе части уравнения умножили на 2); далее,

$$2\mathrm{y} - 2 = 3\mathrm{x} - 27;$$

$$3\mathrm{x} - 2y - 25 = 0.$$

Итак, получили следующую систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 9 = 0, \\ 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} - 25 = 0 \end{cases}$$

(скорректированная математическая модель)

Данную систему можно решить двумя способами.

Первый способ. Применим метод подстановки. Из первого уравнения системы находим: $x = 2y - 9$. Подставим этот результат вместо x во второе уравнение системы. Получим: $3(2y - 9) - 2y - 25 = 0;\ 4y = 52;\ y = 13.$

Так как $x = 2\mathrm{y} - 9$, то $x = 2 \cdot 13 - 9 = 17$.

Итак, $x = 17$, $y = 13$ – решение системы.

Второй способ. Применим метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x-2y+9=0 \\ 3x-2y-25=0 \end{cases}$$

вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$-2x+34=0;\ x = 17.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, т. е. в уравнение $x-2y+9=0$: получаем $17-2y+9=0;\ y=13$.

Итак, $x=17, y=13$ – решение системы.

Второй этап мы завершили (решили полученную систему, причем даже двумя способами).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи*

Спрашивается, сколько школьников было в седьмом классе на уроках в среду, когда пришли все ученики. Поскольку x = 17, y = 13, т.е. в классе было 17 девочек и 13 мальчиков, делаем вывод: всего в классе 17 + 13 = 30 учеников.

Ответ: 30 учеников.

Задача 2. В райцентре два кинотеатра – «Факел» и «Слава», первый – на 400, а второй на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в кинотеатре «Факел», и, кроме того, в каждом ряду на 5 мест больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра факел, если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» больше 25 мест?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели*

Пусть x – число рядов в кинотеатре «Факел», y – число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел». Тогда $x+4$ – число рядов в кинотеатре «Слава», $y+5$ – число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава».

Зная число рядов и число мест в ряду, можно найти общее число мест в каждом кинотеатре: xy – число мест в кинотеатре «Факел», $(x+4)(y+5)$ – число мест в кинотеатре «Слава».

По условию в кинотеатре «Факел» 400 мест, т.е. xy = 400, а в кинотеатре «Слава» 600 мест, т. е. $(x+4)(y+5)=600$.

Таким образом, мы приходим к системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ (x + 4)(y + 5) = 600, \end{cases} \quad (3)$$

где x, y – натуральные числа.

Математическая модель задачи составлена.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Имеем:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x + 20 = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x = 580; \end{cases}$$

Применим метод алгебраического сложения: вычтем первое уравнение из второго. Получим:

$$(x + 4y + 5x) - xy = 580 - 400;$$

$$4y + 5x = 180.$$

Заменим этим уравнением второе уравнение системы :

$$\begin{cases} xy = 400, \\ 4y + 5x = 180. \end{cases}$$

Полученная система несколько проще, чем система

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x = 580; \end{cases}$$

ее можно решить методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = \frac{180-5x}{4}$. Подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$x \cdot \frac{180 - 5x}{4} = 400;$$

$$x(180 - 5x) = 1600;$$

$$5x^2 - 180x + 1600 = 0;$$

$$x^2 - 36x + 320 = 0$$

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = 16.$$

Так как $y = \frac{180-5x}{4}$, то получаем: если $x = 20$, то $y = 20$; если $x = 16$, то $y = 25$.

Итак, система имеет два решения: $(20;\ 20)$ и $(16;\ 25)$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Опираясь на полученные решения системы, мы должны проанализировать две возможности: либо в кинотеатре «Факел» 80 рядов по 20 мест в каждом ряду, либо 16 рядов по 25 мест в каждом ряду. Если выбрать первую возможность, то в кинотеатре «Слава» будет 24 ряда (по условию там на 4 ряда больше) по 25 мест в каждом ряду (по условию в каждом ряду «Славы» на 6 мест больше, чем в «Факеле»). Это нас не устраивает, поскольку по условию в каждом ряду «Славы» более 25 мест. Рассмотрим вторую возможность: в «Факеле» 16 рядов по 25 мест в каждом. Тогда в «Славе» будет 20 рядов по 30 мест в каждом. Это нас устраивает.

Итак, из двух решений системы выбираем одно: x= 16, y = 25, а это означает, что в кинотеатре «Факел» 16 рядов.

Ответ: 16 рядов.

Заключение. Результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Систематизирован материал по теме «Системы алгебраических уравнений» в курсе алгебры основной школы.

В ходе изучения методико-математической литературы определено основное содержание темы «Системы алгебраических уравнений». Рассмотрены основные понятия: алгебраическое уравнение, система уравнений, решение системы уравнений, классификация систем по количеству решений, линейное уравнение (с одним и несколькими неизвестными), квадратное уравнение, равносильность систем, однородные системы, симметрические системы.

2. Рассмотрены: (1) методы решения систем уравнений, изучаемые в основной школе (базовый уровень): метод подстановки, метод

алгебраического сложения, графический метод; (2) метод Гаусса решения систем линейных уравнений (углубленный уровень).

3. Проанализировано содержание школьных учебников по теме «Системы алгебраических уравнений».

Во всех проанализированных учебниках весь теоретический материал (основные методы решения систем алгебраических уравнений) изложены доступно и подкреплены достаточным количеством примеров и упражнений. На наш взгляд, задачный материал учебников желательно дополнить за счет включения: (1) задач по теме «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций»; (2) задач олимпиадного характера (углубленный уровень).

4. Рассмотрены решения олимпиадных задач по теме «Системы алгебраических уравнений».

5. Разработана система задач для учащихся 7 – 9 классов по теме исследования.