МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Восстановление дифференциальных операторов с разрывными весами

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Корсакова Игоря Олеговича

Научный руководитель
зав. каф., д.ф.-м.н., проф. ________________ В.А. Юрко

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ В.А. Юрко

Саратов, 2023 год

Введение В данной работе изучается обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с разрывной весовой функцией и условиями склейки вида

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \tag{3}$$

$$y'(a+0) = y'(a-0)/a_1 + a_2 y(a-0),\ a_1 \neq 0, a \in (0, \pi)$$

где $q(x)$ - функция, называемая потенциалом, $a_1, a_2, h, H \in \mathbb{C}$, λ называется спектральным параметром, $r(x) = -\omega^2$, $x < a$ $r(x) = \alpha^2$, $x > a$ $\omega > 0, \alpha > 0$. Функция $r(x)$ называется разрывной весовой функцией, меняющей знак в точке a, которую называют точкой поворота.

Дифференциальные уравнения с точкой поворота возникают в различных областях математики и приложениях. Например, они появляются в теории упругости, оптике, геофизике, электронике и других областях естествознания и техники. Более того, широкий класс дифференциальных уравнений с особенностями типа Бесселя и их возмущениями сводится к дифференциальным уравнениям с разрывами и весовыми функциями.

Сами же обратные спектральные задачи играют ключевую роль при решении нелинейных уравнений как, например, уравнение Кортевега - де Фриза и др. Обратные задачи для уравнения с точками поворота помогают изучать поведение с нарушением непрерывности решений таких нелинейных уравнений.

Целью магистерской работы является исследование обратной спектральной задачи Штурма-Лиувилля с разрывной весовой функцией и условиями склейки.

Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- Была приведена характеризация спектра задачи Штурма-Лиувилля с разрывной весовой функцией
- Доказаны теоремы единственности решения обратной задачи
- Приведен алгоритм решения обратной задачи.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории операторов и ее приложениях. На основе разработанной конструктивной процедуры могут быть построены численные методы решения обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с точкой поворота и условиями склейки.

Основное содержание работы Данная работа состоит из двух глав.

В первой главе рассматривается классическая обратная задача Штурма-Лиувилля. Рассматривается краевая задача $L = L(q(x), h, H)$:

$$y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \tag{4}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

Здесь λ - спектральный параметр, $q(x), h$ и H вещественны, $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Оператор ℓ называется оператором Штурма-Лиувилля. Пусть $C(x, \lambda), S(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения при начальных условиях

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0, \quad S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1,$$

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H.$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi),$$
$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi(x, \lambda_n) dx.$$

Лемма 1. При $|\rho| \to \infty$ верны следующие асимптотические формулы

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\right) = O(\exp(|\tau|x)),$$

$$\varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + O(\exp(|\tau|x)) = O(|\rho|\exp(|\tau|x)),$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$. Здесь и в дальнейшем $\lambda = \rho^2, \tau = \operatorname{Im}\rho$, а o и O - символы Ландау.

Теорема 1. Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$. При этом

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l_{2,}$$

$$\varphi\left(x,\lambda_n\right) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq C,$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt.$$

Теорема 2. Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi\left(\lambda_0 - \lambda\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}.$$

Теорема 3. Для функции $C(x,\lambda)$ имеет место представление

$$C(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x K(x,t)\cos\rho t dt, \quad \lambda = \rho^2,$$

где $K(x,t)$ - вещественная непрерывная функция, причем

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt$$

Задача 1 По заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h, H.

Теорема 4. Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$, $n \geq 0$, то $L = \tilde{L}$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$. Таким образом, задание спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.

Задача 2 По заданным двум спектрам $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n>0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h и H в краевых условиях.

Теорема 5. Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_{n,}$ $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$. Таким образом, задание двух спектров $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n>0}$ однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.

Пусть функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением уравнения (4) при условиях $U(\Phi) = 1, V(\Phi) = 0$. Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ называются соответственно решением Вейля и функцией Вейля для краевой задачи L.

Теорема 6. Справедливо представление

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (\lambda - \lambda_n)}.$$

Задача 3 По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ построить $L(q(x), h, H)$.

Теорема 7. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет оператор L.

Обозначим

$$D(x, \lambda, \mu) := \frac{\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \int_0^x \varphi(t, \lambda) \varphi(t, \mu) dt \tag{5}$$

Положим

$$\xi_n := |\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|$$

Обозначим

$$\lambda_{n0}=\lambda_n,\ \lambda_{n1}=\tilde{\lambda}_n,\ \alpha_{n0}=\alpha_n,\ \alpha_{n1}=\tilde{\alpha}_n,$$

$$\varphi_{ni}(x)=\varphi\left(x,\lambda_{ni}\right),\ \tilde{\varphi}_{ni}(x)=\tilde{\varphi}\left(x,\lambda_{ni}\right),$$

$$P_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}D\left(x,\lambda_{ni},\lambda_{kj}\right),$$

$$\tilde{P}_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}\tilde{D}\left(x,\lambda_{ni},\lambda_{kj}\right),\ i,j\in\{0,1\},\ n,k\geq 0.$$

Лемма 2. Пусть $f(\rho)$ является аналитической функцией в круге $\left|\rho-\rho^0\right|<a$, и пусть $f(\rho^0)=0,\ |f(\rho)|\leq A$ при $|\rho-\rho^0|<a$. Тогда

$$|f(\rho)|\leq\frac{A}{a}\left|\rho-\rho^0\right|\quad\text{при}\quad\left|\rho-\rho^0\right|<a.$$

Лемма 3. При $x\in[0,\pi],\ n,k\geq 0,\ i,j,\nu=0,1$, имеют место оценки

$$\left|\varphi_{ni}^{(\nu)}(x)\right|\leq C(n+1)^{\nu},\quad\left|\varphi_{n0}^{(\nu)}(x)-\varphi_{n1}^{(\nu)}(x)\right|\leq C\xi_n(n+1)^{\nu},$$

$$|P_{ni,kj}(x)|\leq\frac{C}{|n-k|+1},\quad\left|P_{ni,kj}^{(\nu+1)}(x)\right|\leq C(k+n+1)^{\nu},$$

$$|P_{ni,k0}(x)-P_{ni,k1}(x)|\leq\frac{C\xi_k}{|n-k|+1},\quad|P_{n0,kj}(x)-P_{n1,kj}(x)|\leq\frac{C\xi_n}{|n-k|+1},$$

$$|P_{n0,k0}(x)-P_{n1,k0}(x)-P_{n0,k1}(x)+P_{n1,k1}(x)|\leq\frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Аналогичые оценки верны также для $\tilde{\varphi}_{ni}(x),\tilde{P}_{ni,kj}(x)$.

Лемма 4. Верны соотношения

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}_{k0}(x))}{\alpha_{k0}\left(\lambda-\lambda_{k0}\right)}\varphi_{k0}(x)-\frac{\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}\left(\lambda-\lambda_{k1}\right)}\varphi_{k1}(x)\right),$$

$$\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}-\frac{\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}+$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}\,(\lambda-\lambda_{k0})}\frac{\langle\varphi_{k0}(x),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda_{k0}-\mu)}\right.
$$

$$
\left.-\frac{\langle\tilde{\varphi}(x,\lambda),\tilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}\,(\lambda-\lambda_{k1})}\frac{\langle\varphi_{k1}(x),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda_{k1}-\mu)}\right)=0
$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,\pi]$ и λ,μ на компактах.

Лемма 5. Ряд

$$
\varepsilon_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_{k0}}\tilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x)-\frac{1}{\alpha_{k1}}\tilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x)\right),\quad \varepsilon(x)=-2\varepsilon_0'(x).
$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, причем функция $\varepsilon_0(x)$ абсолютно непрерывна и $\varepsilon(x)\in L_2(0,\pi)$.

Лемма 6. Справедливы соотношения

$$
q(x)=\tilde{q}(x)+\varepsilon(x),
$$

$$
h=\tilde{h}-\varepsilon_0(0),\quad H=\tilde{H}+\varepsilon_0(\pi),
$$

где функции $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon_0(x)$ определяются выше.

Введем также блочную матрицу

$$
H(x)=[H_{u,v}(x)]_{u,v\in V}=\begin{bmatrix}H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x)\\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x)\end{bmatrix}_{n,k\geq 0},
$$

$$
u=(n,i),\;\; v=(k,j)
$$

по формулам

$$\begin{bmatrix} H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x) \\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n0,k0}(x) & P_{n0,k1}(x) \\ P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \xi_k \chi_n \left(P_{n0,k0}(x) - P_{n1,k0}(x)\right) & \chi_n T(x) \\ \xi_k P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k0}(x) - P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix},$$

где

$$T(x) = P_{n0,k0}(x) - P_{n0,k1}(x) - P_{n1,k0}(x) + P_{n1,k1}(x).$$

Рассмотрим банахово пространство m ограниченных последовательностей $\alpha = [\alpha_u]_{u \in V}$ с нормой $\|\alpha\|_m = \sup\limits_{u \in V} |\alpha_u|$. Получаем, что при каждом $x \in [0, \pi]$ операторы $E + \tilde{H}(x)$ и $E - H(x)$ (E - единичный оператор), действующие из m в m, являются линейными ограниченными операторами, причем

$$\|H(x)\|,\ \|\tilde{H}(x)\| \leq C \sup_n \sum_k \frac{\xi_k}{|n-k|+1} < \infty.$$

Теорема 8. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ вектор $\psi(x) \in m$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}(x))\psi(x) \tag{6}$$

в банаховом пространстве m. Оператор $E + \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный, т.е. уравнение (6) однозначно разрешимо.

Алгоритм 1. Даны числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n>0}$.
1) Выбираем $\tilde{L}$ так, что $\tilde{\omega} = \omega$, и строим $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{H}(x)$.
2) Находим $\psi(x)$ (6).
3) Вычисляем $q(x)$, h и H.

Во второй главе рассматривается обратная задача Штурма-Лиувилля с точкой поворота и условиями склейки. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x) y(x), \quad 0 < x < \pi. \tag{7}$$

Здесь λ - спектральный параметр, $r(x) = -\omega^2$ при $x < a, r(x) = \alpha^2$ при $x > a$, и $\alpha > 0, \omega > 0, a \in (0, \pi)$. Функция $q(x)$ комплекснозначная, называемая потенциалом, и $q(x) \in L(0, \pi)$. Обозначим за L не самосапряженную задачу для уравнения (7) с краевыми условиями вида

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{8}$$

и условиями склейки

$$y(a+0) = a_1 y(a-0), \tag{9}$$

$$y'(a+0) = y'(a-0)/a_1 + a_2 y(a-0), a_1 \neq 0,$$

здесь h, H, a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$, и $a_\pm := a_1 \pm i\omega/\left(\alpha a_1\right) \neq 0$. Функция $r(x)$, меняющая знак в определенной точке, называется весовой. Точка $x = a$ называется точкой поворота или точкой разрыва. Рассмотрим следующие обратные задачи:

Обратная задача 1. Даны спектральные данные W, построить L.

Обратная задача 2. Дана функция Вейля $M(\lambda)$, построить L.

Обратная задача 3. Заданы два спектра Λ, Λ_0 и a, построить L.

Получаем, что спектр Λ состоит из двух подпоследовательностей $\Lambda = \{\lambda_k^+\} \cup \{\lambda_k^-\}$, имеющих вид

$$\rho_k^+ := \sqrt{\lambda_k^+} = \frac{k\pi}{\alpha(\pi - a)} + C^+ + O(k^{-1}),\ \ k \to \infty$$

$$\rho_k^- := \sqrt{\lambda_k^-} = \frac{k\pi i}{\omega a} + C^- + O(k^{-1}),\ \ k \to \infty,$$

где

$$C^+ = \frac{1}{2i\alpha(\pi - a)} \ln(A),\ \ C^- = \frac{1}{2\omega a} \ln(-1/A),\ \ A := a_+/a_-.$$

Теорема 9. Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, тогда $L = \tilde{L}$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $a = \tilde{a}$, $\omega = \tilde{\omega}$, $\alpha = \tilde{\alpha}$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$, $a_1 = \tilde{a}_1$, $a_2 = \tilde{a}_2$. Таким образом, задание функции Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет L.

Теорема 10. Если $W = \tilde{W}$, тогда $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание спектральных данных W однозначно определяет L.

Теорема 11. Если $\Lambda = \tilde{\Lambda},\ \Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0,\ a = \tilde{a}$. Тогда $L = \tilde{L}$.

Лемма 7. Справедливо следующее соотношение

$$\tilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{P}_{ni,k0}(x)\varphi_{k0}(x) - \tilde{P}_{ni,k1}(x)\varphi_{k1}(x) \right). \tag{10}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, \pi]$ и λ на компактах.

Введем блочную матрицу $H(x)$ аналогично с первой главой. Тогда

Теорема 12. При каждом фиксированном x, вектор $\psi(x) \in m$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}(x) = (E + \tilde{H}(x))\psi(x) \tag{11}$$

в банаховом пространстве m. Оператор $E + \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный, т.е. уравнение однозначно разрешимо.

Алгоритм 1. Пусть даны спектральные данные W.

1) Строим $M(\lambda)$ по формуле.

$$M(\lambda) = \sum_{n \in S} \sum_{\nu=0}^{m_n - 1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda - \lambda_n)^{\nu+1}}.$$

2) Вычисляем ω по формуле

$$\omega = \left(\lim_{|\rho| \to \infty} \rho M(\lambda) \right)^{-1}.$$

3) Находим нули Λ_0 по формуле

$$M(\lambda) = \frac{\Delta_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

4) Вычисляем a, α и a_1 с помощью

$$a_1 = \sqrt{\frac{(A+1)i\omega}{\alpha(A-1)}},$$

$$a = \left(\omega \lim_{k\to\infty} \frac{\rho_k^-}{k\pi i}\right)^{-1},$$

$$\alpha = \left((\pi - a) \lim_{k\to\infty} \frac{\rho_k^+}{k\pi}\right)^{-1}.$$

5) Выбираем модельную краевую задачу $\tilde{L}$ таким образом, чтобы $a = \tilde{a}$, $\omega = \tilde{\omega}$, $\alpha = \tilde{\alpha}$.

6) Строим $\tilde{\psi}_{ni}(x)$ и $\tilde{H}_{ni,kj}(x)$.

7) Находим $\psi_{ni}(x)$ решая основное уравнение (11).

8) Вычисляем $\varphi_{ni}(x)$.

9) Строим $q(x)$ используя (7).

10) Находим h, H, a_1 и a_2.

Решение обратной задачи 2.2 даётся следующим алгоритмом. **Алгоритм 2.** Пусть дана функция Вейля $M(\lambda)$.

1) Находим ω используя

$$\omega = \left(\lim_{|\rho|\to\infty} \rho M(\lambda)\right)^{-1}.$$

2) Вычисляем спектральные данные W с помощью

$$M(\lambda) = \sum_{n\in S} \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda-\lambda_n)^{\nu+1}}.$$

3) Строим L используя шаги $3-10$ в Алгоритме 1.

Решение обратной задачи 2.3 даётся следующим алгоритмом. **Алгоритм 3**. Пусть даны два спектра Λ, Λ_0.

1) Находим ω:

$$\omega=\left(\lim_{k\to\infty}\rho_k^-/k\pi i\right)^{-1}/a.$$

2) Строим $M(\lambda)$ по

$$M(\lambda)=C\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n\left(\mu_n-\lambda\right)}{\mu_n\left(\lambda_n-\lambda\right)},$$

$$M(\lambda)=\frac{\operatorname{sign}\sigma}{\omega\rho}[1],\quad \rho\in S_{j,\delta}.$$

3) Находим спектральные данные W с помощью

$$M(\lambda)=\sum_{n\in S}\sum_{\nu=0}^{m_n-1}\frac{M_{n+\nu}}{\left(\lambda-\lambda_n\right)^{\nu+1}}.$$

4) Вычисляем α по

$$\alpha=\left((\pi-a)\lim_{k\to\infty}\frac{\rho_k^+}{k\pi}\right)^{-1}.$$

5) Строим L используя шаги $5-10$ Алгоритма 1.

Заключение Цель работы заключалась в исследовании обратной спектральной задачи Штурма-Лиувилля с разрывной весовой функцией и условиями склейки: характеризация спектра, доказательство теорем единственности решения обратной задачи, нахождение алгоритма решения обратной задачи.

Таким образом, все поставленные во введении задачи были выполнены.