МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Функции Хаара и Уолша в обработке сигналов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Яценко Микаела Андреевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________________ Д. С. Лукомский

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ В. А. Юрко

Саратов 2023

Введение. Функции Хаара и Уолша являются системами функций, которые широко используются в обработке сигналов, таких как аудио и изображения. Обе системы основаны на использовании базовых функций, которые могут быть использованы для представления сигналов в виде ряда коэффициентов.

Система Хаара была впервые представлена в 1909 году математиком Альфредом Хааром. Она основана на использовании двух базовых функций: скачкообразной функции (шаговой функции) и функции растяжения (ребра). Скачкообразная функция используется для определения разницы между значениями соседних точек в сигнале, а функция растяжения используется для вычисления среднего значения на заданном интервале. Преобразование Хаара применяется для анализа сигналов и может быть использовано для извлечения ключевых характеристик, таких как среднее значение и разница между значениями соседних точек.

Система Уолша была разработана в 1923 году математиком Джозефом Уолшем. Она использует двоичные последовательности, называемые последовательностями Уолша, которые могут быть использованы для представления сигналов в виде ряда коэффициентов. Последовательности Уолша имеют периодический характер и могут быть использованы для анализа сигналов с периодической структурой. Преобразование Уолша может быть использовано для анализа сигналов, таких как аудио и изображения, и может быть использовано для извлечения ключевых характеристик сигнала.

Быстрые алгоритмы нахождения коэффициентов систем Хаара и Уолша позволяют быстро вычислять коэффициенты преобразований сигналов, что является важным для эффективной обработки больших объемов данных. Быстрое преобразование Хаара и быстрое преобразование Уолша являются эффективными алгоритмами для быстрого вычисления коэффициентов преобразований сигналов в системах Хаара и Уолша соответственно.

Актуальность. Как было отмечено выше, быстрые преобразование Хаара и Уолша остаются актуальными и сейчас, благадаря удобству работы с большими объемами данных.

Цель работы. Цель данной работы: изучить системы функций Уолша и Хаара, изучить быстрые алгоритмы нахождения коэффициентов по данным системам и написать программу, реализующую быстрое преобразования сигналов по рассматриваемым системам.

Структура бакалаврской работы: Первая глава посвящена системе Хаара и некторым ее свойствам, в том числе свойствам рядов Фурье по данной системе. Во второй главе освящена системе Уолша, методам ее упорядочения, основным совйствам рядов фурье по системе Уолша. В третьей главе содержатся описание алгоритмов быстрога преобразования. В четвёртой главе описана реализация быстрых перобразовний Уолша и Хаара на языке python.

Основное содержание работы. Для начала рассмотрим систему Хаара и приведем некотрые свойства.

Прежде чем определить систему Хаара, введем стандартные обозначения двоичных интервалов.

Определение. *Двоичным интервалом называется интервал вида*

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots$$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots$ *обозначим*

$$\begin{gathered} \Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \qquad \bar{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]; \\ \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \qquad \bar{\Delta}_1 = [0,1]. \end{gathered} \tag{1}$$

Если $\delta \subset (0,1)$ - какой-либо интервал, то через δ^+и δ^-обозначаются соответственно левая и правая половины интервала δ (без включения средней точки). В частности $\left(n = 2^k + i\right)$,

$$\begin{aligned} \Delta_n^+ &= \left(\Delta_k^i\right)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ \Delta_n^- &= \left(\Delta_k^i\right)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}. \end{aligned} \tag{2}$$

Интервалы $\left\{\Delta_k^i\right\}_{i=1}^{2^k}$ мы будем называть интервалами k-й пачки, $k = 0, 1, \ldots$. Отметим для дальнейшего следующие простые свойства двоичных интервалов:

1) $\Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \varnothing$ при $i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 1, 2, \ldots$.

2) Если Δ_n и Δ_m- двоичные интервалы и $\Delta_n \cap \Delta_m \neq \varnothing$, то либо $\Delta_n \subset$

Δ_m, либо $\Delta_m \subset \Delta_n$.

Свойство 1) очевидно, а 2) вытекает из того, что при $n = 2^k + i$, $m = 2^l + j, k \geqslant l$, в силу равенства

$$\Delta_l^j = \left(\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right) = \left(\frac{2^{k-l}(j-1)}{2^k}, \frac{2^{k-l}j}{2^k}\right),$$

либо $\Delta_m \subset \Delta_n$ (если $2^{k-l}(j-1) < i \leqslant 2^{k-l}j\big)$, либо $\Delta_m \cap \Delta_n \neq \varnothing($ если $i \leqslant 2^{k-l}(j-1)$ или $i > 2^{k-l}j\big)$.

Определение 1. *Система Хаара - это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1]$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, *а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2^k < n \leqslant 2^{k+1}, k = 0, 1, \ldots,$ *определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{3}$$

На рисунке 1 изображены графики первых восьми систем Хаара.

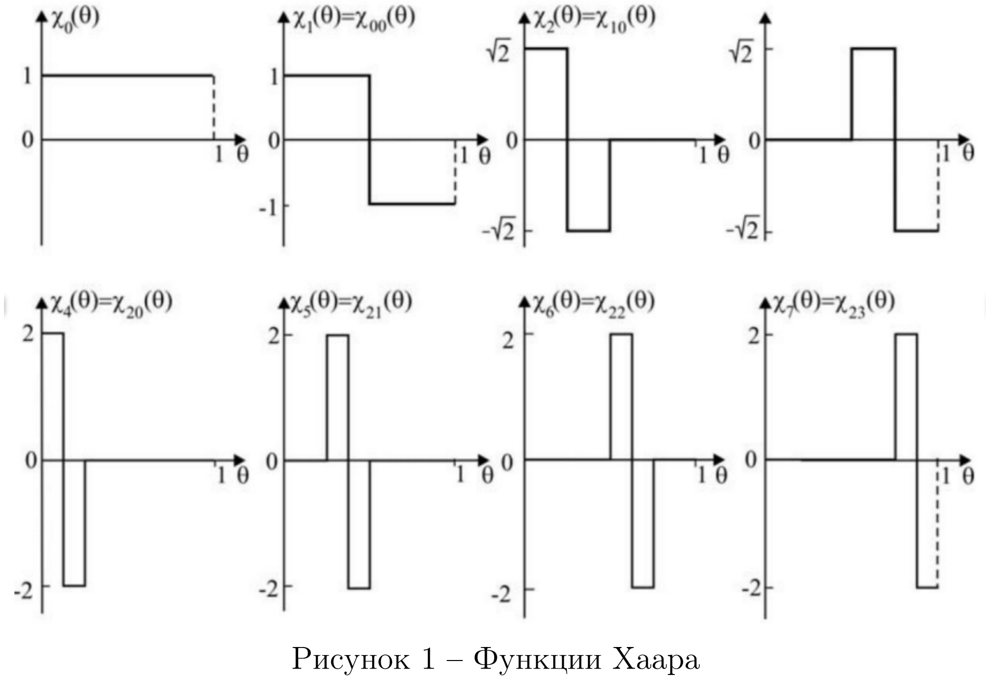


Рисунок 1 – Функции Хаара

Функции Уолша. В дальнейшем будет использоваться запись числа x в двоичной системе: для $x \geqslant 0$

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k(x) 2^{-k}, \text{ где } \theta_k = 0 \text{ или } 1 \tag{29}$$

Коэффициенты $\theta_k(x)$ определяются однозначно, если дополнительно считать, что для двоично-рациональных x рассматривается разложение (29) с конечным числом ненулевых коэффициентов.

Ясно, что для $x \in (0,1)$ $\theta_k(x) = 0$ при $k \leqslant 0$..

Если число $n > 0$ - целое, то

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{-k}(n) 2^k = \sum_{k=0}^{k(n)} \theta_{-k}(n) 2^k$$
$$\theta_{-k(n)}(n) = 1, \quad k(n) = [\log_2 n].$$

Определение 5. *Система Уолша - это система функций*

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1]$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, *а при* $n \geqslant 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} = r_{k(n)+1}(x) \prod_{k=0}^{k(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} \tag{30}$$

где $r_k(x), k = 1, 2, \ldots, -$ *функции Радемахера.*

Система Уолша - полная в $L^p(0,1), 1 \leqslant p < \infty$, ортонормированная система функций. Попарная ортогональность функций $w_n(x)$ есть прямое следствие того факта, что система Радемахера - система нормированных функций. Для того чтобы доказать полноту системы W в $L^p(0,1), 1 \leqslant p < \infty$, отметим, что из определения 5 следует, что функции $w_n(x), 0 \leqslant n < 2^k$, постоянны на каждом из интервалов $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), 1 \leqslant n \leqslant 2^k$. Поэтому после изменения в конечном числе точек функции $w_n(x), 0 \leqslant i < 2^k$, становятся элементами пространства $\mathfrak{D}_{2^k}$ и в виду их попарной ортогональности образуют базис в $\mathfrak{D}_{2^k}$. Таким образом,

$$\left\{P(x) : P(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(x)\right\} \cong D_{2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{31}$$

(знак $\cong$ означает, что $P(x) \in D_{2^k}$ после изменения в конечном числе точек). Из (31), учитывая, что кусочно постоянные функции плотны в $L^p(0,1)$, сразу получаем полноту системы Уолша в $L^p(0,1), 1 \leqslant p < \infty$.

Из формулы (30) вытекает следующее свойство функций Уолша: для $k \geqslant 0, i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$

$$w_{2^k+i}(x) = r_{k+1}(x) w_i(x) = w_{2^k}(x) w_i(x), \quad x \in [0,1].$$

Каждой функции $f \in L^1(0,1)$ соответствует ее ряд Фурье по системе Уолша:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) w_n(x), \quad c_n(f) = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx.$$

Быстрое преобразование Хаара

Пусть функции Хаара заданы на $[0,1)$ $\left(N = 0, 1, \ldots; j = 0, 1, \ldots, 2^N - 1\right)$.

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и представим $[0,1)$ в виде объединения двоичных полуинтервалов

$$[0,1) = \bigsqcup_{j=0}^{2^N-1} \Delta_j^{(N)} \quad \left(\Delta_j^{(N)} = \left[j 2^{-N}, (j+1) 2^{-N}\right)\right)$$

Любая двоично ступенчатая функция $f^{(N)}(t)$, постоянная на $\Delta_j^{(N)}$, есть полином по системе Хаара

$$f^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) \chi_j(t) \tag{68}$$

Вектор $(\hat{f}(j))_{j=0}^{2^N-1}$ называют дискретным преобразованием Фурье - Хаара функции $f^{(N)}$. Для краткости будем обозначать $f_j^{(N)} = f\left(\Delta_j^{(N)}\right)$, т.е. функцию f можно рассматривать как вектор $\left(f_j^{(N)}\right)_{j=0}^{2^N-1}$.

Получим быстрый алгоритм нахождения $\hat{f}$. Запишем равенство (69) в виде

$$f^{(N)}(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) + \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) +$$

$$+ r_{N-1}(t) \sum_{j=0}^{2^{N-1}} \hat{f}\left(2^{N-1}+j\right) h_j^{(N-1)}(t) = f^{(N-1)}(t) + r_{N-1}(t) g^{(N-1)}(t), \qquad (69)$$

где $h_j^{(N-1)}(t) = \chi_{\Delta_j^{(N-1)}}(t), f^{(N-1)}(t)$– двоично-ступенчатая функция, постоянная на $\Delta^{(N-1)}, g^{(N-1)}(t)$ - двоично ступенчатая, значения которой на $\Delta_j^{(N-1)}$ равно $\hat{f}\left(2^{N-1}+j\right)$. Записывая равенство (69) на полуинтервале $\Delta_j^{(N-1)} = \Delta_{2j}^{(N)} \sqcup \Delta_{2j+1}^{(N)}$, получим систему

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} - g_j^{(N-1)} \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} f_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2j}^{(N)} + f_{2j+1}^{(N)}\right), \\ g_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)}\right), \quad \left(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1}-1\right) \end{cases}. \qquad (70)$$

Таким образом, находим значения $f_j^{(N-1)}$ функции $f^{(N-1)}$ и значения $g_j^{(N-1)}$ функции $g^{(N-1)}$, причем $g_j^{(N-1)} = \hat{f}\left(2^{N-1}+j\right)$, т.е. мы нашли компоненты $\hat{f}$ с номерами $\geq 2^{N-1}$. Сделанный шаг удобно записать в следующем виде.

Пусть

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1})$$

вектор значений функции $f^{(N)}$. Равенства (70) для вектора (λ_n) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\lambda_j := \tfrac{1}{2}\left(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}\right) && \left(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1} - 1\right) \\
&\lambda_{2^{N-1}+j} := \tfrac{1}{2}\left(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}\right) && \left(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1}\right)
\end{aligned} \tag{71}
$$

Таким образом, проведя преобразования (71), мы получим новый вектор $(\lambda_n)_{n=0}^{2^N-1}$, в котором последние компоненты $\lambda_{2^{N-1}+j} = \hat{f}\left(2^{N-1} + j\right)$, а первые компоненты $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}-1}$ есть значения функции

$$
f^{(N-1)} = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t)
$$

кусочно постоянной на полуинтервалах ранга $N-1$, причем коэффициенты Фурье - Хаара функции $f^{(N-1)}$ есть первые 2^{N-1} коэффициентов исходной функции $f^{(N)}$. Применяя к функции $f^{(N-1)}$, т.е. к вектору

$$
(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1})
$$

преобразования (71), получим вектор

$$
(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-2}-1}, \lambda_{2^{N-2}}, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1})
$$

в котором последние 2^{N-2} компонент есть компоненты вектора $\hat{f}$.

Продолжая последовательное применение формул (71), получаем после N-го шага последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^N-1})$, которая совпадает с $\hat{f}$. Нетрудно посчитать, что число операций равно

$$
2 \cdot 2^N + 2 \cdot 2^{N-1} + \ldots + 2 \cdot 2^1 \approx 2^{N+2}
$$

Быстрое преобразование Фурье-Уолша

Задача ставится аналогично дискретному преобразованию Хаара. Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ - двоично-постоянна на $[0,1)$ и $f_j = f^{(N)}\left(\Delta_j^{(N)}\right)$.

$$
f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x), \tag{72}
$$

где $w_j(x)$– функции Уолша на $[0,1)$.

Для нахождения коэффициентов $\hat{f}(j)$. Записываем (72) в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x) + r_{N-1}(x) \sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}\left(2^{N-1}+j\right) w_j(x) =$$
$$= f^{(N-1)} + r_{N-1}(x) g^{(N-1)}(x),$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ двоично-ступенчатые на интервалах ранга $N-1$.

Аналогично получаем значения $f^{(N)}(x)$. Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через $\lambda_j \left(j = 0, \ldots, 2^N - 1\right)$, то дискретное преобразование для вектора (λ_j) задается формулами (15).

$$\lambda_j := \frac{1}{2}\left(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}\right),$$
$$\lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}\left(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}\right).$$

Как и в преобразовании Хаара, получаем вектор

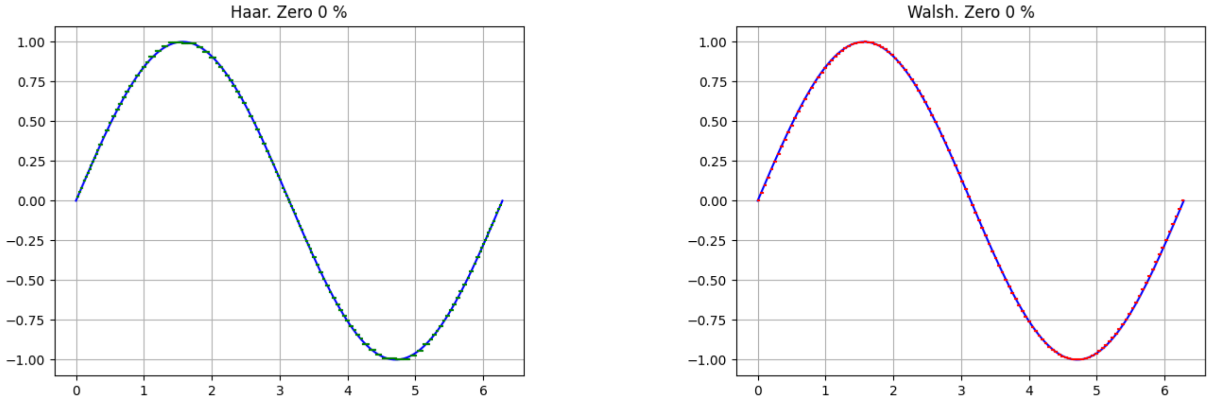
$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1})$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент - значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $\lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1}$ не будут коэффициентами Фурье-Уолша функции $g^{(N-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование (71) и к левой половине вектора (λ_n), и к правой половине. Повторяя эту процедуру N раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье-Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций $N2^{N+1}$.

В четвертой главе использую вышеуказанные алгоритмы преобразовываем сигнал. За исходный сигнал возьмем график синусоиды.

Построим быстрое преобразование Уолша и Хаара для 128 точек.

Для Хаара и Уолша получим 128 коэффициентов преобразования и абсолютное отклонение от исходного сигнала равное - $3.3306690738754696e-16$.



а) б)

Рисунок 7 – Преобразования Уолша при удалении 50% коэффициентов

Удаляя 50% для преобразования Уолша (рис. 10) и Хаара (рис. 11). Для первого преобразования получим отклонение - 0.09401752933412216, а для второго - 0.07845202583530358.

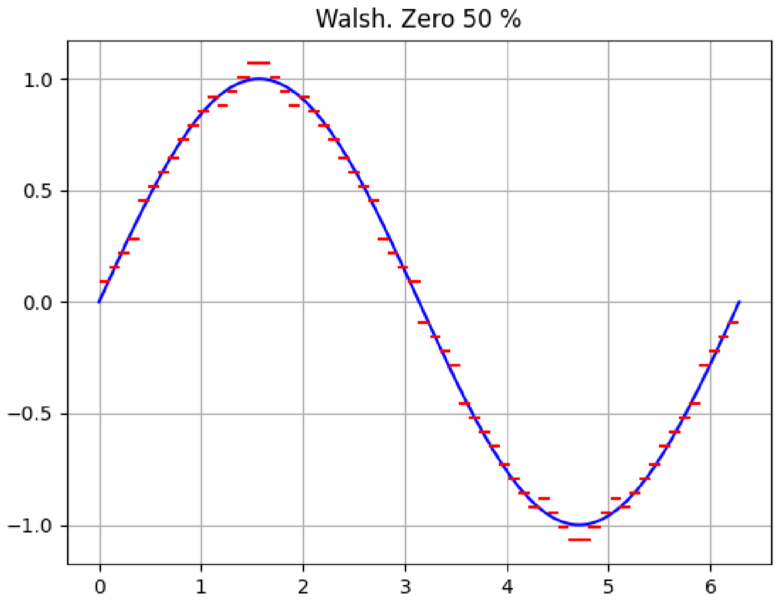


Рисунок 8 – Преобразования Уолша при удалении 50% коэффициентов

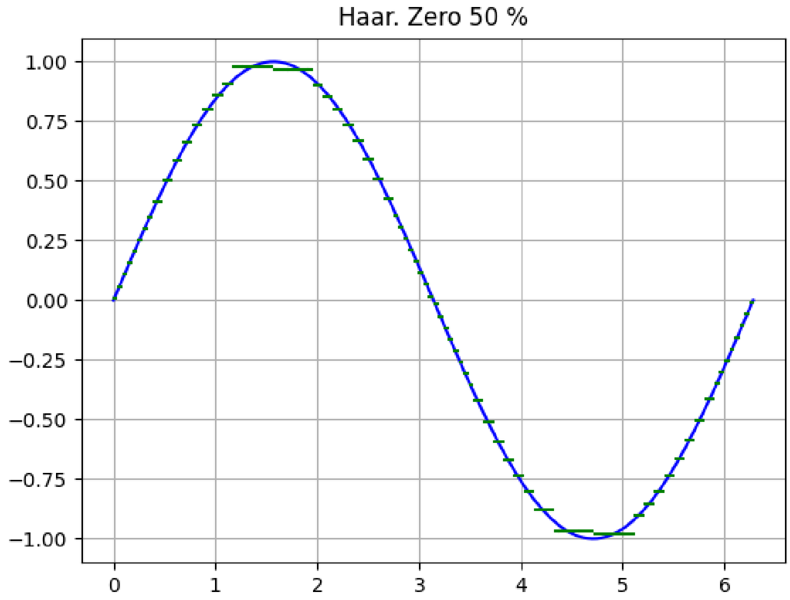


Рисунок 9 – Преобразования Хаара при удалении 50% коэффициентов

В результате получили достаточно точное приближение при удалении 50% коэффициентов, причем алогоритм Хаара оказался точнее алгоритма Уолша.

Заключение. В данной работе были изучены системы функций Хаара и Уолша. Были рассмотрены основные свойства данных систем, в том числе свойства рядов Хаара-Фурье и Уолша-Фурье. Были изучены быстрые алгоритмы нахождения коэффициентов по данным системам и была написана программа на Python 3, реализующая разложение сигнала по данным системам. Также был определен оптимальный процент числа коэффициентов для сжатия исходного сигнала без серьезной потери точности.