МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Численные решение обратной задачи для системы Захарова-Шабата

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Шитова Данила Артёмовича

Научный руководитель
Доцент, к.ф.м.н ____________________ Игнатьев М.Ю.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ Юрко В.А.

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.Метод решения обратной задачи Захарова-Шабата является важным инструментом для расчета спектральных характеристик волн в нелинейных средах. Этот метод нашел широкое применение в различных областях физики, таких как оптика, акустика, физика конденсированного состояния и др.

Однако, существующие методы решения обратной задачи Захарова-Шабата имеют ограничения в скорости и точности расчетов. В данной работе была предложена супербыстрая реализация метода Захарова-Шабата, которая позволяет значительно ускорить расчет спектральных характеристик волн в нелинейных средах при высокой точности.

Таким образом, данная работа имеет высокую актуальность для различных областей физики, где требуется расчет спектральных характеристик волн в нелинейных средах. Цель данной работы заключается в разработке супербыстрой реализации метода решения обратной задачи Захарова-Шабата. Объектом исследования в настоящей квалификационной работе являются уравнения обратной задачи рассеяния. Целью и предметом исследования является описание численного метода для обратной задачи Захарова–Шабата.

Квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. В первой главе приводятся основные определения и понятия задачи рассеяния необходимые для дальнейшего изложения.Показывается применённая к ней схема Абловица-Ладика, рассматривается алгоритм быстрого решения задачи на собственные значения.

Во второй главе рассматривается решение обратной задачи рассеяния методом Гельфанда-Левитана-Марченко.

В третьей главе излагаются методы численного решения обратной задачи рассеяния . В приложении была продемонстрированнаа имплементация численных методов при помощи рпограмного кода на Python. В конце приводится список литературы, использованной при написании настоящей квалификационной работы.

1 Основное содержание работы

Опишем прямую задачу рассеяния для системы Захарова-Шабата Мы рассмотрим задачу Захарова-Шабата на собственные значения: Прежде всего мы предположим, что q и r достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Отметим, что это предложение очень важно, поскольку теория рассеяния с другими граничными условиями приводит к совершенно другим результатам. Быстрое убывание позволяет определить собственные функции $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ со следующими граничными условиями при $\zeta = \xi (\zeta = \xi + i\eta$ - собственное значение):

$$\left.\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x \to -\infty \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\xi x} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x \to +\infty \tag{1.2}$$

Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением φ, будем пользоваться обозначением φ^* для комплексного сопряжения. Это решение определено в фиксированный момент времени (скажем, при $t = 0$), и вся развиваемая в этом разделе теория рассеяния (прямая и обратная) относится к этому фиксированному моменту времени. Позже покажем, как получить зависящие от времени волновые функции. Далее в этом разделе мы будем опускать временную зависимость в обозначениях. Теперь, если $u(x,\xi)(u(x,\xi)$ - это 2×1 вектор-столбец с компонентами $u_i(x,\xi), i = 1,2)$ и $v(x,\zeta)$ являются решениями (1.1) – (1.2), мы имеем

$$\frac{d}{dx} W(u,v) = 0 \tag{1.3}$$

где $W(u,v)-$ вронскиан u и v :

$$W(u,v) = u_1 v_2 - v_1 u_2 \tag{1.4}$$

Из (1.3) – (1.4) мы видим, что $W(\varphi,\bar{\varphi}) = -1$ и $W(\psi,\bar{\psi}) = 1$. Решения $\psi,\bar{\psi}$ являются линейно независимыми; таким образом, мы можем написать

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi \tag{1.5}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi} \tag{1.6}$$

(Знак минус здесь выбран для удобства.) Мы также отметим, что матрица рассеяния определяется обычно следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Используя (1.1.7) – (1.1.9) и $W(\varphi,\bar{\varphi}) = -1$, мы получим

$$a(\xi)\bar{a}(\xi) + b(\xi)\bar{b}(\xi) = 1 \tag{1.8}$$

$$\frac{dv_1}{dx} = -i\zeta v_1 + q v_2, \tag{1.9}$$

$$\frac{dv_2}{dx} = i\zeta v_2 + r v_1 \tag{1.10}$$

Теорема 1. Если q,r $\in L_1$ (являются абсолютно интегрируемыми), то $\oint$ функции $e^{i\zeta x}\varphi, e^{-i\zeta x}\psi$ являются аналитическими в верхней полуплоскости $(\eta > 0), a e^{-i\zeta x}\bar{\varphi}, e^{i\zeta x}\bar{\psi}-$ аналитическими в нижней полуплоскости $(\eta < 0)$

Это приводит к тому, что функция $a = W(\varphi, \psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ яв- $^-$ является аналитической в верхней полуплоскости, а $\bar{a} = W(\bar{\varphi}, \bar{\psi})-$ в нижней полуплоскости.

Функции $b = W(\varphi, \bar{\psi}), b = W(\bar{\varphi}, \psi)$, вообще говоря, не обладают аналитическими свойствами.

Изложим для прямой задачи рассеяния схему Абловица–Ладика аппроксимации системы уравнений Захарова–Шабата. Эта схема является одной из самых простых, но с ее помощью возможно "быстрое" вычисление данных рассеяния. Возможны различные способы подхода к написанию этой схемы. Считаем, что $t_1 = 0, t_2 = L$. Тогда условие на вектор v при $t = 0$ принимает вид

$$v|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аппроксимируем дифференциальные уравнения системы Захарова-Шабата разностной схемой Эйлера

$$\frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{h} = -ikv_1^n + q_n v_2^n, \tag{1.11}$$

$$\frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{h} = ikv_2^n - q_n^* v_1^n, \tag{1.12}$$

где q_n^* обозначает комплексное сопряжение q_n. Запишем систему $(1.35), (1.36)$ в виде

$$\begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ikh & q_n h \\ -q_n^* h & 1 + ikh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

В схеме Абловица-Ладика величину $1 \pm ikh$ заменяют на $e^{\pm ikh}$. Переобозначим $q_n h$ за q_n. В результате схема (1.37) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & q_n \\ -q_n^* & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$z = e^{ikh}$$

После замены переменных

$$v_1^n = z^{-n} P_1^n, \quad v_2^n = z^{-n-1} P_2^n$$

получим

$$\begin{pmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_n \\ -q_n^* z^2 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}, \quad \vec{P}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

или

$$\vec{P}^{n+1} = M_n \vec{P}^n$$

В результате

$$\vec{P}^N = M_n \dots M_1 \vec{P}^0 = M \vec{P}^0$$

где

$$M = M_n \dots M_1$$

Полиномы $P_1^N(k), P_2^N(k)$ определяют функции $v_1^N(k), v_2^N(k)$ и, следовательно, данные рассеяния $a(k), b(k)$. Таким образом, основная задача заключается в быстром вычислении $\vec{P}^N$.
Определение 3 Коэффициенты матрицы полиномов.

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_1$$

могут быть вычислены "сверхбыстрым"образом, т.е. за $O\left(N \log_2^2 N\right)$ операций.

Алгоритм быстрого решения задачи на собственные значения. Теперь рассмотрим алгоритм решения задачи на собственные значения для системы уравнений Захарова-Шабата

$$\frac{dv_1}{dt} + ikv_1 = iq_0(t)v_2,$$
$$\frac{dv_2}{dt} - ikv_2 = -iq_0^*(t)v_1,$$

с граничным условием

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L_2\left(\mathbb{R}^1\right)$$

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Первый шаг состоит в применении преобразования Греффе-Лобачевского.

Шаг 2. Применяя теорему Коши мы разбиваем круг на кольца, внутри каждого из которых лежит число корней, не превышающих заданное.

Шаг 3. Вычисляются суммы Ньютона для каждого кольца.

Шаг 4. Корни полинома малого порядка вычисляются стандартным образом при помощи QR алгоритма. По найденным корням определяются собственные значения исходной задачи.

Шаг 5. В случае необходимости приближения к корням полинома могут быть уточнены, например, имеющим кубическую скорость сходимости методом Лагерра.

Выведем формулы обратной задачи рассеяния, предполагая, что данные рассеяния $(a, a, b, \bar{b})$ являются целыми функциями. Достаточно предположить, что q, r убывают быстрее любой экспоненты при $|x| \to \infty$. Это весьма ограничительное предположение можно отбросить, но при этом предложенный здесь простой вывод придется несколько модифицировать.

Вначале мы примем следующие интегральные представления для функций $\psi, \bar{\psi}$:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x,s) e^{i\zeta s} ds, \tag{1.15}$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x,s) \bar{e}^{i\zeta s} ds, \tag{1.16}$$

где $\zeta = \xi + i\eta, \eta \geqslant 0$ и $K, \bar{K}$ являются двухкомпонентными векторами, т. е.

$$K(x,s) = \begin{pmatrix} K_1(x,s) \\ K_2(x,s) \end{pmatrix}$$

Интегральный член, содержащий $K, \bar{K}$, определяет отличие асимптотик при $x = \infty$ от истинной собственной функции. Чтобы удовлетворить граничным условиям, естественно считать ядро K треугольным, т. е. $K(x,s) = 0$ при $x > s$. Наиболее важным звеном этой конструкции является независимость ядер $K, \bar{K}$ от ζ. Для того чтобы обосновать существование таких представлений, достаточно подставить Начальные уравнения в прямую задачу рассеяния.

Таким образом, необходимо и достаточно удовлетворить уравнениям

$$\begin{gathered} (\partial_x - \partial_s) K_1(x,s) - q(x) K_2(x,s) = 0, \\ (\partial_x + \partial_s) K_2(x,s) - r(x) K_1(x,s) = 0 \end{gathered} \tag{1.17}$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\begin{gathered} K_1(x,x) = -\frac{1}{2} q(x), \\ \lim_{s \to \infty} K(x,s) = 0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Опираясь на теорию характеристик, можно показать, что решение рассматриваемой задачи (задачи Гурса) существует и единственно. Аналогично можно показать существование и единственность K.

Вводим линейные интегральные уравнение Гельфанда - Левитана - Марченко обратной задачи рассеяния. Рассмотрим точки ζ, принадлежащие контуру C, который начинается в $-\infty + i0^+$, проходит над всеми нулями $a(\zeta)$ и оканчивается в $\infty + i0^+$. Мы предположим функции q и r достаточно быстро убывающими; это позволяет продолжить данное внизу уравнение в верхнюю полуплоскость и затем переписать его в виде

$$\frac{\varphi(x,\zeta)}{a(\zeta)} = \bar{\psi}(x,\zeta) + \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)}\psi(x,\zeta) \tag{1.19}$$

Подставляя (1.15) – (1.16) в (1.19), находим

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x,s)e^{-i\zeta s}ds + \\ + \frac{b}{a}(\zeta)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x,s)e^{i\zeta s}ds\right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Умножим это уравнение на $\frac{1}{2\pi}e^{i\zeta y}d\zeta$ и проинтегрируем по контуру C при $y > x$. Воспользовавшись представлением δ-функкиии Дирака $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C e^{i\zeta x}d\zeta$ и изменив порядок интегрирования, получим

$$I = \bar{K}(x,y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x+y) + \int_x^\infty K(x,s)R(s+y)ds \tag{1.21}$$

где

$$R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{b}{a}(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta \tag{1.22}$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_\zeta \frac{\varphi(x,\zeta)}{a(\zeta)}e^{i\zeta y}d\zeta \tag{1.23}$$

Интеграл $I = 0$, так как функция $\varphi e^{i\zeta x}$ является аналитической в верхней полуплоскости, $y > x$ и контур C проходит выше всех нулей $a(\zeta)$. В результате имеем

$$\bar{K}(x,y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}R(x+y)+\int_x^\infty K(x,s)R(s+y)ds=0 \tag{1.24}$$

Произведя такие же преобразования над аналитическим продолжением соотношения (1.8) в нижнюю полуплоскость, получим

$$K(x,y)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{R}(x+y)-\int_x^\infty \bar{K}(x,s)\bar{R}(s+y)ds=0 \tag{1.25}$$

где

$$\bar{R}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{c}}\frac{\bar{b}}{\bar{a}}e^{-i\zeta x}d\zeta \tag{1.26}$$

и $\bar{C}$ - такой же контур, как C, но обходящий все нули $\bar{a}(\zeta)$ снизу. Частный случай этих формул получается в предположении, что $a(\zeta)$ имеет изолированные простые нули (случай кратных нулей получается как предел при слиянии простых нулей) и не обращается в нуль на вещественной оси ($\zeta=\xi,\eta=0$). В случае более медленного убывания, когда функции $a,\bar{a},b,\bar{b}$ не могут быть аналитически продолжены, нормировочные константы $C_j,\bar{C}_j$, находятся как коэффициенты пропорциональности собственных функций $\varphi_j=\varphi\left(x,\zeta_j\right)$. Интегральные уравнения удобно записать в виде одного матричного уравнения, полагая

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix}\bar{K}_1 & K_1\\ \bar{K}_2 & K_2\end{pmatrix},\quad \mathcal{R}=\begin{pmatrix}0 & -\bar{R}\\ R & 0\end{pmatrix} \tag{1.27}$$

при этом имеем

$$\mathcal{H}(x,y)+\mathcal{R}(x,y)+\int_0^\infty \mathcal{H}(x,s)\mathcal{R}(s+y)ds=0 \tag{1.28}$$

Как уже отмечалось выше, в частном (но важном с точки зрения физических приложений) случае $r = \pm q^*$ имеются различные соотношения симметрии. Воспользовавшись уравнениями из прямой задачи рассеяния, получим

$$\begin{gathered} \bar{R}(x) = \mp R^*(x), \\ K(x,y) = \begin{pmatrix} K_2^*(x,y) \\ \pm K_1^*(x,y) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.29}$$

Интегральные уравнения (1.28) с учетом этих условий симметрии приводятся к виду

$$K_1(x,y) \mp R^*(x+y) \pm \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x,z)R(z+s)R^*(s+y)dsdz = 0. \tag{1.30}$$

Наконец, используя (1.18), мы получим потенциал

$$q(x) = -K_1(x,x) \tag{1.31}$$

Потенциал $r(x)$ определяется по формуле

$$r(x) = -2\bar{K}_2(x,x)$$

которая получается тем же способом, что и (2.22).

Теорема 2. Рещение уравнения (2.12) для системы Захарова-Шабата с $r = -q^*$, существует и единственно.

Рассмотрим Layer Peeling метод для решения обратной задачи рассеяния. Вместо обратной задачи для системы уравнений Захарова-Шабата сформулируем следующую дискретную обратную задачу рассеяния для системы Абловица-Ладика. Пусть вектор

$$\vec{P}^n = \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}$$

определяется рекуррентным соотношением

$$\begin{pmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_n \\ -q_n^* z^2 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}$$

Начальное условие имеет вид

$$\vec{P}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть известен вектор $\vec{P}^N$. Требуется найти все значения $q_n, n = 1, \ldots, N$. Рассмотрим случай начальных данных $q_0(t)$, при которых дискретный спектр задачи для системы Захарова-Шабата не пуст. В этом случае Layer Peeling метод комбинируется с преобразованием Дарбу.

На первом шаге вычисляются коэффициенты рассеяния $a(k), b(k)$ и собственные значения $\lambda_i, i = 1, \ldots, N_{\text{eig}}$, где N_{eig} - число собственных значений.

Формируется коэффициент $\widetilde{a}(k)$, соответствующий потенциалу $\widetilde{q}$, не имеющему собственных значений:

$$\widetilde{a}(k) = a(k) \prod_{i=1}^{N_{\text{eig}}} \frac{k - \lambda_i^*}{k - \lambda_i}$$

При помощи преобразования Дарбу добавляется солитонная часть решения, связанная с собственными значениями λ_i.

Алгоритм применения преобразования Дарбу в данном случае следующий. Пусть известен потенциал $q_0(t)$. Вычисляем вектор Иоста, определяемый начальными данными:

$$\vec{\phi}(0, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

соответствующий потенциалу $q_0(t, z)$. Аналогичным образом формулируется задача вычисления вектора Иоста, соответствующего рассеянию волны, падающей слева, который обозначим $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$. Для вектора $\vec{\psi}$ начальное условие имеет вид

$$\vec{\psi}_1(L,z)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ikL}$$

Строится функция

$$\beta_0\left(t,z,\lambda_1,b_1(z)\right)=\frac{\phi_1^{(0)}(t,z)-b_1(z)\psi_1^{(0)}(t,z)}{\phi_2^{(0)}(t,z)-b_1(z)\psi_2^{(0)}(t,z)}$$

Вычисляется потенциал q_1

$$q_1(t,z)=q_0(t,z)-2i\frac{\left(\lambda_1-\lambda_1^*\right)\beta_0}{1+|\beta_0|^2}$$

соответствующий задаче, дискретный спектр которой содержит собственное значение λ_1.

Далее алгоритм продолжается аналогичным образом, последовательно добавляя части решения, соответствующие остальным собственным значениям

$$\beta_{j-1}\left(t,z,\lambda_j,b_j(z)\right)=\frac{\phi_1^{(j-1)}(t,z)-b_{j-1}(z)\psi_1^{(j-1)}(t,z)}{\phi_2^{(j-1)(t,z)}-b_{j-1}(z)\psi_2^{(j-1)}(t,z)},$$
$$q_j(t,z)=q_{j-1}(t,z)-2i\frac{\left(\lambda_j-\lambda_j^*\right)\beta_{j-1}}{1+|\beta_{j-1}|^2}$$

до тех пор пока не будет построен потенциал $q(t,z)$. TIB алгоритм для решения обратной задачи рассеяния Далее представим TIB алгоритм для решения обратной задачи рассеяния. Этот алгоритм основан на применении метода типа метода Дурбина-Левинсона для решения системы линейных уравнений с теплицевой матрицей. Дальнейшее изложение проведем для уравнений относительно A_1, A_2. Для применения алгоритма выполняется следующая замена переменных, если рассматривается случай левого рассеяния. Для потенциала q с конечным носителем ядро $\Omega(w)$ убывает экспоненциально быстро при $w<0$. Считаем, что

$$\Omega\left(t'+y\right)=0,\quad t'+y<0$$

Несобственные интегралы аппроксимируются собственными

$$A_1^*(t,y) - \int_{-y}^{t} \Omega_L\left(t'+y\right) A_2\left(t,t'\right) dt' = 0$$

$$-A_2^*(t,y) + \Omega_L(t+y) + \int_{-y}^{t} \Omega_L\left(t'+y\right) A_1\left(t,t'\right) dt' = 0, \quad y<t$$

После замены переменных в первом уравнении $t' = \tau' - t$, оно принимает вид

$$A_1(t,y) - \int_{t-y}^{2t} \Omega_L^*\left(\tau' - (t-y)\right) A_2^*\left(t,\tau'-t\right) d\tau' = 0$$

После замены переменных $t' = t - \sigma$ второе уравнение принимает вид

$$-A_2^*(t,y) + \Omega_L(t+y) + \int_{0}^{t+y} \Omega_L\left(t+y-\sigma'\right) A_1\left(t,t-\sigma'\right) d\sigma' = 0$$

$$\tau = t+y, \quad \sigma = t-y$$

Вводя новые функции

$$u(t,\sigma) = A_1(t,t-\sigma), \quad v(t,\tau) = -A_2^*(t,\tau-t)$$

придадим интегральным уравнения вид

$$u(t,\sigma) + \int_{\sigma}^{2t} \Omega_L^*\left(\tau'-\sigma\right) v\left(t,\tau'\right) d\tau' = 0$$

$$v(t,\tau) + \int_{0}^{\tau} \Omega_L\left(\tau-\sigma'\right) u\left(t,\sigma'\right) d\sigma' \Big) = -\Omega_L(\tau)$$

Переменные изменяются в области

$$|y| < t, \quad 0 < t < L$$

где $[0,L]$ носитель функции $q(t)$. При этих ограничениях переменные $\tau = t+y$, $\sigma = t-y$ изменяются на отрезке $[0,2t]$.

Для численного решения интегральных уравнений введем сетку

$$
\begin{aligned}
t_m &= \frac{mh}{2}, \quad m = 0, \ldots, N \\
\sigma_k &= hk, \qquad k = 0, \ldots, m \\
\tau_n &= hn, \qquad n = 0, \ldots, m
\end{aligned}
$$

где $h = 2L/N$. Для переменных τ' и σ' введем аналогичную сетку.

Рассмотрим функции

$$
u_k = u\left(t_m, \sigma_k\right), \quad v_n = v\left(t_m, \tau_n\right)
$$

Применяя формулу прямоугольников для аппроксимации интегралов, дискретизируем систему интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&u_k + h \sum_{n=k}^{m-1} \Omega_{n-k}^{*} v_n = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1 \\
&v_n + h \sum_{k=0}^{n-1} \Omega_{n-k} u_k = \Omega_n
\end{aligned}
$$

где $\Omega_{n-k} = \Omega(hn - hk)$. Потенциал q определяется из этой системы уравнений следующим образом:

$$
q(t) = -2A_2^{*}(t, t) = 2v(t, 2t), \quad q\left(t_m\right) = 2v_m
$$

В векторных обозначениях

$$
\vec{u}^T = \left(u_0, \ldots, u_{m-1}\right)^T, \quad \vec{v}^T = \left(v_1, \ldots, v_m\right)^T
$$

получим

$$
G^m \vec{w}^m = \begin{pmatrix} I_m & \Omega_m^H \\ \Omega_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{0} \\ \vec{\Omega}_m \end{pmatrix}
$$

где Ω_m^H– комплексно-сопряженная матрица к Ω_m. Матрица Ω с элементами Ω_{n-m} имеет треугольную теплицеву форму:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_{m-1} \end{pmatrix}$$

TIB уравнения принимают блочно-теплицеву форму.

Заключение.В работе изучены численные методы решения обратной задачи Захарова-Шабата. Написана программа для Схемы-Абловица-Ладика и Layer Peeling метода.