МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Восстановление интегро-дифференциального оператора свертки по спектру
наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки __4___ курса ___411_____ группы

направления_01.03.02 - Прикладная математика и информатика________________
код и наименование направления

_______________механико-математического факультета________________________
наименование факультета, института, колледжа

Хашовой Екатерины Олеговны
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ________________ ___С.А. Бутерин___
должность, уч. степень, уч. звание подпись,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор_________ __________________ ________В.А. Юрко_______
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2023

Введение. В последние годы возрастает интерес к нелинейным обратным задачам спектрального анализа для интегро-дифференциальных операторов.

В качестве модельной ситуации рассматривается один важный и показательный класс интегро-дифференциальных операторов, а представленный метод может быть распространен на более сложные обратные задачи.

Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам или в синтезе операторов с желаемыми спектральными свойствами. Задачи такого рода являются нелинейными, что и вызывает основную трудность при их изучении. Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач известны для дифференциальных операторов. Однако в последние годы данная теория интенсивно развивается и для интегро-дифференциальных операторов, для которых классические методы обратной спектральной теории не работают. Такие операторы часто более адекватны для моделирования различных реальных процессов в физике, биологии, технике и экономике.

Целью данной работы является разработка эффективного подхода к численному решению и анализу устойчивости обратных спектральных задач для интегро-дифференциальных операторов.

Поставленная цель определила следующие **задачи**:

1. Изучить обратную спектральную задачу для интегро-дифференциального оператора свертки;
2. Исследовать устойчивость обратной задачи;
3. Реализовать численный метод решения обратной спектральной задачи для оператора свертки.

В качестве модельной ситуации рассмотрим один важный и показательный оператор:

$$\ell y \equiv -y'' + \int_0^x M(x-t)y'(t)dt, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

а представленный метод может быть распространен на обратные задачи для широкого круга операторов.

Естественно потребовать, что функция $M(x)$ принадлежит некоторому весовому пространству Соболева. Рассмотрим случай, когда комплекснозначная функция, удовлетворяет условию:

$$(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi).$$

Обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ оператора ℓ найти функцию $M(x)$.

В [1] эта обратная задача была сведена к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению, и была установлена его глобальная однозначная разрешимость. Это позволило доказать теорему единственности и получить конструктивную процедуру решения обратной задачи 1, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Это оказалось первым результатом по глобальной разрешимости обратной спектральной задачи для интегро-дифференциальных операторов.

В дальнейшем развитие этого подхода позволило решить обратные задачи для других классов интегро-дифференциальных операторов, среди которых: интегро-дифференциальные системы Дирака [2], [3], интегро-дифференциальные операторы с разрывами [4], [5] и операторы на геометрических графах [6], операторы дробных порядков [7], [8] и интегро-дифференциальные пучки [9], а также так называемые полуобратные задачи [10], [11], когда сверточное ядро должно быть восстановлено на части его области определения по части спектра. Для разных классов операторов соответствующие основные уравнения принимают различный вид, что требует доказательства их разрешимости во всех новых случаях. Для удобства в [12] развит общий подход к решению нелинейных уравнений этого типа путем введения некоторого абстрактного уравнения и доказательства его глобальной разрешимости наряду с равномерной полной устойчивостью.

Одна из основных трудностей, возникающих при численном решении обратной задачи 1, связана с нелинейностью основного уравнения. Центральное место в нашем подходе занимает аппроксимация решения основного уравнения целыми функциями экспоненциального типа. Полностью теоретически обоснована предложенная численная схема и установлена устойчивость обратной задачи. Различные аспекты устойчивости обратных спектральных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов второго порядка изучались в работах [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]. Однако устойчивость обратной задачи 1 до работы [25] не исследовалась.

Работа состоит из 6 разделов.

В первом разделе производится построение оператора преобразования.

Во втором разделе приводится необходимая информация из [1] и описывается численная схема.

Во третьем разделе доказывается устойчивость обратной задачи 1 (теорема 2).

В четвертом разделе вводятся основные предположения, для построения численного алгоритма решения обратной задачи.

В пятом разделе построен и теоретически обоснован (теорема 3) численный алгоритм (алгоритм 2) решения обратной задачи.

В шестом разделе приводятся и обсуждаются конкретные результаты численного моделирования.

Основное содержание работы. В первом разделе **«Оператор преобразования и характеристическая функция»** показано построение оператора преобразования. Рассмотрим функцию $H(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$M(x) = 2iH(x) + \int_0^x dt \int_0^t H(t-\tau)H(\tau)d\tau, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

и поэтому $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$. Восстановим $H(x)$ и тогда можно построить $M(x)$ через (1).

Пусть $y = S(x,\lambda)$ решение $ly := -y'' + \int_0^x M(x-t)y'(t)dt = \lambda y, 0 < x < \pi$, удовлетворяющее начальным условиям $S(0,\lambda) = 0, S'(0,\lambda) = 1$. Собственные значения L совпадают с нулями его характеристической функции $\Delta(\lambda) := S(\pi,\lambda)$.

Лемма 1. Пусть $\rho^2 = \lambda$. Тогда имеет место следующее представление:

$$S(x,\lambda) = \frac{sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{sin\rho(x-t)}{\rho}dt, \tag{2}$$

где

$$P(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu}\frac{(x-t)^{\nu}}{\nu!}H^{*\nu}(t),$$

$$H^{*1}(x)=H(x)\quad H^{*(\nu+1)}(x)=H*H^{*\nu}(x)=\int_0^x H(x-t)H^{*\nu}(t)dt.$$

Во втором разделе **«Основное нелинейное интегральное уравнение обратной задачи»** приведена необходимая информация из [1] и описывается численная схема. Рассмотрим краевую задачу $L=L(M)$

$$-y''+\int_0^x M(x-t)y'(t)dt=\lambda y,\quad 0<x<\pi, \tag{3}$$

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{4}$$

где $M(x)$ комплекснозначная функция в $L_{2,\pi}:=\{f(x):(\pi-x)f(x)\in L_2(0,\pi)\}$.

Пусть $y=S(x,\lambda)$ будет решением уравнения (3) при начальных условиях $S(0,\lambda)=0$ и $S'(0,\lambda)=1$. Собственные значения $\lambda_k, k\geq 1$, задачи L совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda):=S(\pi,\lambda)$ с учетом кратности, которая является целой функцией порядка $\frac{1}{2}$. Кроме того, справедливо следующее представление:

$$\Delta(\lambda)=\frac{\sin\rho\pi}{\rho}+\int_0^{\pi} w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}dx,\quad w(x)\in L_2(0,\pi),\quad \rho^2=\lambda. \tag{5}$$

Используя (5) известным методом с использованием теоремы Руше можно получить асимптотику

$$\lambda_k=\rho_k^2,\quad \rho_k=k+\varkappa_k,\quad \{\varkappa_k\}\in l_2,\quad k\geq 1. \tag{6}$$

Более того, теорема Адамара о факторизации дает представление

$$\Delta(\lambda)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k^2}. \tag{7}$$

По лемме 1, функция $w(x)$ в (5) имеет вид:

$$w(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} N^{*\nu}(x), \tag{8}$$

где

$$N^{*1}(x) = N(x), \quad N^{*(\nu+1)}(x) = N^* N^{*\nu}(x) = \int_0^x N(x-t) N^{*\nu}(t)dt, \quad \nu \geq 1,$$

а $N(x) \in L_{2,\pi}$ является решением нелинейного интегрального уравнения:

$$M(x) = 2N(x) - \int_0^x dt \int_0^t N(t-\tau)N(\tau)d\tau, \quad 0 < x < \pi. \tag{9}$$

Соотношение (8) можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно функции $N(x)$, которое называется основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи.

Теорема 1.

1. Для произвольных комплексных чисел λ_k, k $\geqslant 1$, вида (6) существует единственная (с точностью до значений на множестве нулевой меры) функция $M(x) \in L_{2,\pi}$, такая что $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ спектр соответствующей задачи на собственные значения $L(M)$;
2. Функция $M(x)$ удовлетворяет дополнительному условию гладкости: $M(x) \in W_2^1[0,T]$ для каждого $T \in (0,\pi)$ и $M'(x) \in L_{2,\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_k = \left(k + \frac{A}{k} + \frac{\varkappa_{k,1}}{k}\right)^2, \quad \{\varkappa_{k,1}\} \in l_2, \quad A - \text{const}. \tag{10}$$

Кроме того, $M(0) = 2A$.

Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм 1.

1. Вычислить функцию $w(x)$ по формуле

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta(k^2) \sin kx, \tag{11}$$

   где функция $\Delta(\lambda)$ строится по (7);
2. Найти функцию $N(x)$, решив основное уравнение (8);
3. Построить функцию $M(x)$ по формуле (9).

В третьем разделе **«Устойчивость обратной задачи»** показывается доказательство теоремы, которая дает устойчивость обратной задачи 1.

Теорема 2.

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ спектр краевой задачи $L(M)$ с некоторой фиксированной функцией $M(x)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что если спектр $\{\widetilde{\lambda}_k\}_k \geq 1$ другой проблемы $L(\widetilde{M})$ удовлетворяет условию

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \widetilde{\lambda}_k|^2}{k^2}} \leq \delta, \tag{12}$$

затем $\|M - \widetilde{M}\|_{2,\pi} \leq C\Lambda$, где зависит только от функции $M(x)$ и $\|\cdot\|_{2,\pi}$ обозначает норму в $L_{2,\pi}$, т.е. $\|f\|_{2,\pi} = \|(\pi - x)f(x)\|, a\|\cdot\|$ норма в $L_2(0,\pi)$.

Очевидно, что теорема 2 является прямым следствием следующих трех утверждений, дающих устойчивость всех трех шагов алгоритма 1 в соответствующих метриках.

Предложение 1.

Зафиксируем произвольную последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ вида (6) и по формулам (11) и (7) построим функцию $w(x) \in L_2(0,\pi)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любой последовательности $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k\geq 1}$, удовлетворяющей (12), справедлива следующая оценка: $\|w - \widetilde{w}\| \leq C\Lambda$, где $\widetilde{w}(x)$ определяется соотношением

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda}{k^2} = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^{\pi} \widetilde{w}(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} dx, \tag{13}$$

и не зависит от $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k\geq 1}$.

Следующее утверждение, дает равномерную устойчивость уравнения (8) в пространстве $L_{2,\pi}$.

Предложение 2.

Для любого $R>0$ существует $C>0$ такое, что $\|N-\widetilde{N}\|_{2,\pi}\leq C\|w-\widetilde{w}\|$ как только $\|w\|\leq R$ и $\|\widetilde{w}\|\leq R$, где $N(x)$ является решением уравнения (8), пока $\widetilde{N}(x)$ является одним из (8) с $\widetilde{w}(x)$ вместо $w(x)$.

Следующее предложение дает устойчивость третьего шага алгоритма 1.

Предложение 3.

Для любого $R>0$ существует С >0 такое, что

$$\|M-\widetilde{M}\|_{2,\pi}\leq C\|N-\widetilde{N}\|_{2,\pi}, \tag{14}$$

как только $\|N\|_{2,\pi}\leq R$ и $\|\widetilde{N}\|_{2,\pi}\leq R$, где функция $M(x)$ определяется через $N(x)$ по формуле (9), а $\widetilde{M}(x)$ определяется $\widetilde{N}(x)$ по аналогичной формуле

$$\widetilde{M}(x):=2\widetilde{N}(x)-\int_0^x dt\int_0^t \widetilde{N}(t-\tau)\widetilde{N}(\tau)d\tau. \tag{15}$$

В четвертом разделе **«Решение обратной задачи»** дается численный алгоритм решения обратной задачи 1. Пусть задана некоторая последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ вида (6). Согласно теореме 1 эта последовательность всегда является спектром некоторой краевой задачи $L(M)$. Для нахождения численного приближения к функции $M(x)$ можно фактически использовать только конечное число собственных значений:

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n. \tag{16}$$

Однако по техническим причинам дополним исходные собственные значения (16) до бесконечной последовательности значениями $k^2>n^2$, в свою очередь являющимися собственными значениями простейшей задачи $L(0)$.

Другими словами, применяя Алгоритм 1 к последовательности

$$\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}_{k\geq 1},\quad \lambda_k^{(n)}=\begin{cases}\lambda_k, & k=\overline{1,n},\\ k^2, & k>n.\end{cases} \tag{17}$$

Численный подход основан на следующих двух предположениях.

Предложение 4. Если нули функции $\Delta(\lambda)$, определяемой (5), имеют вид (17) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то функция $w(x)$ в (5) целая. Более того, представление

$$w(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, \tag{18}$$

держится с

$$a_k = (-1)^k \frac{k^2 - \lambda_k}{k} \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{n} \frac{\lambda_j - k^2}{j^2 - k^2}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Предложение 5. Если $w(x)$ – целая функция экспоненциального типа и $w(0) = 0$, то решение $N(x)$ основного уравнения (8) также является целой функцией экспоненциального типа.

Далее покажем, что коэффициенты b_k степенного ряда свободного члена

$$w(\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}, \tag{20}$$

уравнение (8) однозначно определяет коэффициенты γ_k степенного ряда ее решения

$$N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{x^k}{k!}. \tag{21}$$

Обратим внимание, что в обоих рядах суммирование начинается с $k = 1$ так как согласно (18) вместе с (8) имеем $w(\pi) = N(0) = 0$.

В пятом разделе **«Численный алгоритм»** строится и теоретически обосновывается численный алгоритм решения обратной задачи 1.

Алгоритм 2.

Пусть задано конечное множество из собственных значений (16). Тогда можно построить приближенное решение $M_n(x)$ обратной задачи, выполнив следующие шаги:

1. Вычислить $a_k, k = \overline{1, n}$, по формуле (19);
2. Найти числа $b_k, k \geq 1$, по формуле $b_{2k} = 0$, $b_{2k-1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} j^{2k-1} a_j, \quad k \in \mathbb{N}$;

3. Найти числа $\gamma_k, k \geq 1$, по алгоритму 2 и сохранить полученное $\gamma_k^{(2)}, k \geq 3$;
4. Вычислить $m_k, k \geq 1$, по формуле $m_k = 2\gamma_k, \quad k = \overline{1,3}, \quad m_k = 2\gamma_k - \gamma_{k-1}^{(2)}, \quad k \geq 4$;
5. Наконец, построить функцию $M_n(x)$ по формуле $M_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{x^k}{k!}$.

Отметим, что для численных экспериментов шаги 2-4 должны быть ограничены $k = \overline{1,K}$ с некоторым конечным K. Таким образом, на последнем шаге 5 фактически получается усеченный степенной ряд $M_{n,K}(x)$ функции $M_n(x)$, т.е. полином степени не выше K.

Следующая теорема дает теоретическое обоснование алгоритма 2.

Теорема 3.

При $n \to \infty$ функции $M_n(x)$, построенные по алгоритму 2, сходятся в пространстве $L_{2,\pi}$ к точному решению $M(x)$ обратной задачи 1, т.е.

$$\|M - M_n\|_{2,\pi} \to 0, \quad n \to \infty.$$

В шестом разделе **«Численный эксперимент»** приведен пример численного решения обратной задачи 1.

Прежде всего, нашли спектры для следующих тестовых функций:

1. $M(x) = 1$;
2. $M(x) = \sin x$;
3. $M(x) = x^2$.

Для этих трех случаев вычислили решения $S(x, \lambda)$ в явном виде. В случаях 2) и 3) для этого использовалось преобразование Лапласа, а затем находились нули характеристической функции $\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda)$ по дихотомии. Таким образом, для каждого случая получили несколько первых собственных значений, представленных в таблице 6.1. Отметим, что случай $M(x) = x^2$ отличается появлением пары взаимно сопряженных комплексных собственных значений.

Применяя алгоритм 2, построили полиномиальную аппроксимацию $M_{n,K}(x)$ функции $M(x)$, используя первые n собственных значений в таблице 6.1, ограничив ее шаги 2-4 первыми K значениями. Для каждого теста выбираем оптимальное значение K, такое, что

$$\max_{0\le x\le\pi}|M_{n,K-1}(x)-M_{n,K}(x)|<\varepsilon,$$

где взяли $\varepsilon=10^{-3}$. Результаты для $n=3,5,7$ представлены в соответствие с рисунками 6.1 – 6.9 в сравнении с точными решениями.

Можно видеть, что для $M(x)=1$ численные решения не сходятся к точному решению в точках $x=0$ и $x=\pi$. Однако они сходятся в $L_{2,\pi}$-метриках, как утверждает теорема 3.

Для $M(x)=\sin x$ и $M(x)=x^2$ получаем достаточно точные поточечные аппроксимации за пределами малых окрестностей $x=\pi$ в таблице 6.2 приведены взвешенные унифицированные нормы

$$\max_{0\le x\le\pi}(\pi-x)\left|M(x)-M_{n,K}(x)\right|,$$

различия между точным и приближенным решениями.

Заключение. В данной работе было рассмотрено численное решение и устойчивость обратной спектральной задачи для интегро-дифференциального оператора свертки. Была исследована обратная спектральная задача для интегро-дифференциального оператора свертки.

Одним из главных вопросов, рассмотренных в работе, была устойчивость обратной задачи, основным информационным источником стала статья [25].

В качестве результата работы были получены численные методы решения обратной спектральной задачи для интегро-дифференциального оператора свертки, а также изучены основные свойства и устойчивость задачи.