МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ

студента (ки)__4___ курса ___411_____ группы

направления_01.03.02 - Прикладная математика и информатика___________________
код и наименование направления

_______________механико-математического факультета________________________
наименование факультета, института, колледжа

_______________________Захарова Марка Александровича________________________
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
старший преподаватель ________ __________________ С.Ю. Советникова __
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор __________ ___________________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2023

Введение Тема методов приближенного решения интегральных уравнений второго рода является актуальной в современной науке и технике. Эта тема имеет широкое применение в различных областях, таких как математическое моделирование, физика, химия, биология, механика и др.

Интегральные уравнения второго рода возникают в задачах, связанных с распределением потоков, электромагнитными полями, механикой сплошных сред и других областях. Решение этих уравнений является сложной задачей, которую часто не удается решить аналитически.

Поэтому методы приближенного решения интегральных уравнений второго рода имеют большое значение. Они позволяют получать численные решения с высокой точностью и использовать их для анализа различных физических процессов.

Более того, разработка новых методов приближенного решения интегральных уравнений второго рода является активной областью исследований в математике и прикладных науках. В настоящее время существует множество методов, таких как методы коллокаций, методы Галеркина, методы Монте-Карло и др., которые используются для приближенного решения интегральных уравнений второго рода.

Таким образом, тема методов приближенного решения интегральных уравнений второго рода является актуальной и имеет большое значение для различных областей науки и техники.

Цель работы - заключается в изучении основных методов приближенного решения интегральных уравнений второго рода

Объект исследования - интегральные уравнения второго рода

Предмет исследования - методы приближенного решения.

Для достижения цели поставленной в работе, необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить теоретический материал на данную тему.
2. Решить поставленную задачу для частного случая.
3. Решить задачу в общем случае.
4. Провести численный эксперимент на C++ по выяснению точности приближения.

5. Проанализировать и сравнить полученные результатов.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, четырёх разделов, заключения, списка используемых источников и приложения.

Основное содержание работы В данной работе будет рассматриваться интегральное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденым ядром.

Уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром имеет вид:

$$\int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

где $K(x,y)$ - ядро уравнения, $u(y)$ - неизвестная функция, $f(x)$ - заданная функция, a и b - границы интегрирования.

Вырожденное ядро - это ядро интегрального оператора, которое не обладает полным набором собственных функций. В таком случае, решение уравнения Фредгольма 2-го рода может быть не единственным или вообще не существовать. Вырожденные ядра возникают, когда ядро оператора имеет особенности, такие как сингулярности или точки разрыва.

Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром являются сложными для решения, потому что они не имеют полного набора собственных функций, что затрудняет аналитическое решение. Кроме того, вырожденные ядра могут иметь особенности, такие как сингулярности или точки разрыва, которые могут приводить к неоднозначности решения или его отсутствию. В таких случаях, для решения уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром часто используются численные методы.

Для решения уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром часто используются численные методы, такие как методы коллокаций, методы Галеркина, методы Ньютона-Котеса и другие. Эти методы позволяют приближенно находить решение уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром, используя дискретизацию и аппроксимацию ядра оператора. Кроме того, для решения таких уравнений могут использоваться специальные алгоритмы, такие как методы регуляризации, которые позволяют устранить неоднозначность решения и получить устойчивое решение.

В отличие от уравнений Фредгольма 2-го рода с невырожденным ядром, уравнения с вырожденным ядром могут иметь бесконечное число решений или не иметь решений вовсе. Поэтому для их решения требуются специальные методы, такие как метод квадратурных формул.

Метод квадратурных формул

Метод квадратурных формул - это численный метод решения уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Он основан на приближенном вычислении интеграла, содержащего ядро уравнения, с помощью квадратурных формул.

Метод квадратурных формул является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения интегральных уравнений второго рода. Он заключается в замене интеграла на конечную сумму, которая вычисляется с помощью квадратурных формул.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма 2 рода с ядром $K(x, y)$ метод квадратурных формул заключается в следующих шагах:

1. Разбиваем область интегрирования на конечное число интервалов.

2. На каждом интервале выбираем точки x_i и y_i, которые называются узлами квадратурной формулы.

3. Вычисляем значения ядра $K(x, y)$ в каждой паре (x_i, y_i).

4. Вычисляем веса w_i для каждой пары (x_i, y_i), используя выбранную квадратурную формулу.

5. Заменяем интеграл на сумму взвешенных значений ядра $K(x, y)$ на всех парах (x_i, y_i).

6. Полученную сумму можно рассматривать как линейную комбинацию неизвестных функций $f(x)$ с известными коэффициентами.

7. Решаем полученную систему линейных уравнений для определения неизвестных функций $f(x)$.

Метод квадратурных формул имеет ряд преимуществ, таких как простота реализации, высокая скорость вычислений и возможность использования для решения широкого класса интегральных уравнений. Однако он также имеет некоторые ограничения, связанные с выбором узлов и весов квадратурной формулы, которые могут существенно влиять на точность решения. Поэтому для достижения высокой точности решения интегральных уравнений часто применяются более сложные методы, такие как метод граничных элементов или методы спектрального анализа.

Приближённые методы решения

Еще одним приближенным методом решения уравнений Фредгольма 2 рода является метод граничных элементов. Он основан на представлении неизвестной функции в виде суммы базисных функций, которые задаются на границе области интегрирования. Этот метод позволяет получать высокоточные решения даже для сложных геометрических форм области интегрирования.

Также для решения уравнений Фредгольма 2 рода часто используются методы спектрального анализа, такие как метод Галеркина или метод коллокаций. Они основаны на разложении неизвестной функции в ряд по ортогональным базисным функциям и выборе коэффициентов этого разложения таким образом, чтобы удовлетворить уравнению.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и ограничения, и выбор метода зависит от конкретной задачи и требуемой точности решения.

Метод интегральных уравнений для краевых задач

Метод интегральных уравнений является эффективным методом решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Он основан на представлении решения уравнения в виде интеграла от неизвестной функции и ее производных.

Для решения краевой задачи с помощью метода интегральных уравнений необходимо сначала построить интегральное уравнение, которое связывает неизвестную функцию на границе области с известными значениями на этой границе.

Затем необходимо выбрать метод решения полученного интегрального уравнения. Один из таких методов - метод Неймана, который заключается в последовательном приближении к решению путем замены интеграла на конечную сумму.

Другой метод - метод коллокаций, который заключается в выборе некоторого числа точек на границе области и приближенном вычислении интеграла с помощью численных методов.

Метод интегральных уравнений позволяет получать точные решения для широкого класса краевых задач, включая задачи с неоднородными граничными условиями и нелинейными уравнениями. Однако этот метод требует высокой вычислительной мощности и может быть неэффективным для больших областей интегрирования.

Практическая часть

Метод квадратурных формул. Найдем приближенное решение уравнения (1) методом квадратурных формул. Построим на отрезке $[a, b]$ сетку с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Запишем уравнение (1) в узлах сетки:

$$y\left(x_i\right)-\lambda \int_a^b K\left(x_i, s\right) y(s) d s=f\left(x_i\right), \quad i=1,2, \ldots, n.$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (2) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$y_i-\lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{i j} y_j=f_i, \quad i=1,2, \ldots, n.$$

Здесь $y_i=\tilde{y}\left(x_i\right), f_i=f\left(x_i\right), K_{i j}=K\left(x_i, x_j\right), \tilde{y}-$ приближение к искомой функции y, A_j - веса квадратурной формулы.

Решение системы уравнений (3) дает приближенные значения искомой функции в узлах x_i. По ним с помощью интерполяции можно построить приближенное решение интегрального уравнения (1) на всем отрезке $[a, b]$.

Пусть $\lambda=1$, а сетка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - равномерная с шагом h. Используем квадратурную формулу трапеций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (3) примет следующий вид:

$$y_i-h \sum_{j=1}^n w_j K_{i j} y_j=f_i, \quad i=1,2, \ldots, n$$

где $w_1=w_n=1 / 2, w_j=1$ при $j=2,3, \ldots, n-1$.

Пример. Дано уравнение (1) с границами отрезка интегрирования $a = -\pi$ и $b = \pi$, параметром $\lambda = 3/(10\pi)$, ядром

$$K(x, s) = \frac{1}{0.64\cos^2\left(\frac{x+s}{2}\right) - 1}$$

и правой частью $f(x) = 25 - 16\sin^2(x)$. Точное решение этого уравнения $y(x) = 17/2 + (128/17)\cos(2x)$. Надо найти приближенное решение этого уравнения методом квадратурных формул, основанным на использовании формулы трапеций с равномерной сеткой с шагом $h = \pi/18$, и сравнить с точным.

На языке C++ сценарий решения этой задачи выглядит следующим образом. Для сравнения использовались встроенные библиотеки языка C.

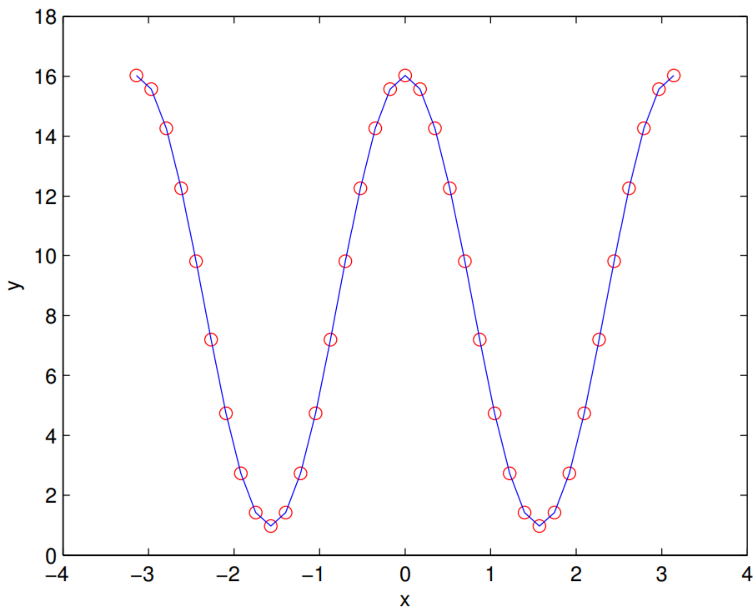

Рисунок 1

Непрерывной линией обозначено точное решение, кружочками — приближенное решение.

Заключение В данной работе мы рассмотрели методы решения уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром, включая метод квадратурных формул. Он является одним из наиболее распространенных численных методов для аппроксимации интегралов. Он позволяет вычислять значения интегралов с любой заданной точностью.

x	точное решение	приближенное решение
0.00000000000000	16.02941176470588	16.02941176470589
0.17453292519943	15.57533267415272	15.57533267415272
1.57079632679490	00.97058823529412	00.97058823529412
2.96705972839036	15.57533267415272	15.57533267415273
3.14159265358979	16.02941176470588	16.02941176470588

Рисунок 2

Основные результаты:

1. Изучен теоретический материал на данную тему.

2. Найдено решение поставленной задачи для частного и общего случаев.

3. Произведён численный эксперимент на C++.

4. Произведён анализ и сравнение полученных результатов