МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 — Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Дудакова Игоря Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф. -м. н., доцент ______________ А. Н. Сергеев

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент ______________ С. В. Галаев

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Алгебра Клиффорда играет важную роль в математике. Она позволяет построить много важных примеров алгебр, которые часто встречаются в различных математических конструкциях. В настоящее время алгебры Клиффорда активно используются во многих разделах математической физики. В науке разработан ряд математических понятий и моделей, которые широко используются в геометрии и физике: комплексные числа, кватернионы, векторная алгебра, матричная алгебра, тензорная алгебра, алгебра дифференциальных форм.

Цель работы. В данной работе исследуются некоторые вопросы теории алгебр Клиффорда, возникающие в математической физике, в частности, в теории поля. Целью работы является установление связи между двумя наборами элементов алгебры Клиффорда, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, и найти алгоритм для вычисления явного вида элемента, осуществляющего эту связь. Еще одна цель - применение полученных результатов для изучения связи спинорных и ортогональных групп, а именно, получить явные формулы для вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми. Они заключаются в следующем: предложен метод вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам соответствующих ортогональных групп при двулистном накрытии; развит метод усреднения из теории представлений конечных групп для алгебр Клиффорда (сверток, построенных по двум наборам антикомму-тирующих элементов).

Основное содержание работы. Работа состоит из введения, трёх основных разделов, заключения, списка использованных источников, и приложения А, где указан программный код для получения кватерниона из вектора и величины угла разворота.

1 Некоторые свойства алгебр Клиффорда

1.1 Понятие алгебры Клиффорда

Определение 1. *Кольцом называется множество A с двумя алгебраическими операциями сложения и умножения, удовлетворяющие следующим свойствам:*

1. *Ассоциативность:* $(a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b$
2. $(\exists 0), (\forall a)$, *такое, что выполняется* $a+0=a$
3. $(\forall a), (\exists -a)$,*такое, что выполняется* $a+(-a)=0$
4. *Коммутативность:* $a+b=b+a$
5. $(ab)c = a(bc) = (ac)b$
6. $a0=0$
7. *Дистрибутивность:* $(a+b)c = ac+bc$
8. *Если* $(\exists 1), (\forall a)$, *такое, что выполняется* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, *то говорят, что множество A - кольцо с единицей.*

Определение 2. *Кольцо называется коммутативным, если* $\forall x, y \in K$ *выполняется* $x \cdot y = y \cdot x$.

Определение 3. *Коммутативное кольцо с единицей называется полем, если в нём:*

1. *Существует по крайней мере два элемента.*
2. $(\forall a \in A), (a \neq 0), \big(\exists a^{-1} \in A\big)$ *такое, что* $a^{-1} \cdot a = 1$.

Определение 4. $(a \neq 0)$ *называется обратимым, если* $\exists a^{-1}$, *такое, что выполняется* $a \cdot a^{-1} = 1$.

Примеры алгебр

1.Поле комплексных чисел.

Пусть $(C, +, \cdot)$, любое комплексное число представлено как $z = x+iy$, где $z \in C, x, y \in R, i$ - мнимая единица. Поле комплексных чисел расширение поля действительных чисел.

2.Внешняя алгебра линейного пространства.

Пусть V -действительное линейное пространство, $\dim V = n, (e_i)$ −базис V.

$\Lambda^p V$ - действительное линейное пространство, его размерность $C_n^p, \Lambda^0 V = R$, с базисом $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_1}$, где $i_1 < \ldots < i_p$.

Операция умножения обозначается знаком Λ и обладает следующими свойствами:

1. Следовательно, $P \wedge 1 = P$, где $1 \in \Lambda^0 V = R$.
2. $P \in \Lambda^p V, Q \in \Lambda^q V, R \in \Lambda^q V, (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$
3. $P \in \Lambda^p V, Q \in \Lambda^q V, Q \wedge P = (-1)^{pq} P \wedge Q$

Внешняя алгебра линейного пространства не зависит от выбора базиса.

3.Алгебра кватернионов.

Однажды Гамильтон гулял вдоль канала у себя в Дублине, когда его осенило. «Эврика!» - возможно, воскликнул он, после чего совершил акт вандализма и нацарапал на перилах моста надпись:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -\mathbf{1}$$

Эта надпись и определяет, что такое кватернион. Как оказалось, двух мнимых единиц слишком мало для счастья, их нужно три, i, j, k, и вот тогда получившееся четырёхкомпонентное число - кватернион - будет замечательно описывать поворот в пространстве!

Кватернион можно определить как формальную сумму $a + bi + cj + dk$ где a, b, c, d - вещественные числа, a, i, j, κ - мнимые единицы со следующим свойством: $i^2 = i^2 = \kappa^2 = ijk = -1$. Таким образом, таблица умножения базисных кватернионов $-1, i, j, \kappa$ - выглядит так:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

1.2 Определение алгебры Клиффорда и основная теорема

Определение 5. *Пусть L - линейное пространство над полем K с симметрической билинейной формой $g, C(L)$ - алгебра над полем K, отображение $\rho : L \to C(L)$ - линейное. Пусть выполняются следующие условия:*

1. *$\rho(x)^2 = g(x, x)1$, где $g(x, x) \in K$, $1 \in K$*
2. *Любой элемент из $C(L)$ является представим в виде линейной комбинации одночленов от элементов множества $\rho(X)$, т.е. элементов*

вида $\rho(x_1)\dots\rho(x_p)$, $x_1,\dots,x_p \in L$, $p = 1,\dots,n$ *Алгебру* $C(L)$ *будем называть алгеброй Клиффорда [1]*

Теорема 1. *1. Для всякого линейного пространства* L *с заданной симметрической билинейной формой в (x,y) алгебра Клиффорда* $C(L)$ *существует и имеет размерность* 2^n *над полем* K, *где* $n = \dim L$

2. Пусть $\sigma : L \to D$ *любое* K*- линейное отображение* $L_в$ K*- алгебру* D, *для которого* $\sigma(x)^2 = g(x,x)1$ *для всех* $1 \in L$. *Тогда существует единственный гомоморфизм* $K_{\text{- алгебр}}$ $\tau : C(L) \to D$, *такой, что* $\sigma = \tau \cdot p$. *В частности,* $C(L)$ *- определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Докозательство теоремы 1. *Докажем первое утверждение теоремы.*

Предположим, что $C(L)$ *существует, тогда выберем в* L *ортогональный базис* $\{e_1,\dots,e_n\}$, *т.е* $g(e_i,e_j) = 0$ *при* $i \neq j$ *Покажем, что в* $C(L)$ *выполнятся соотношения:*

1. $\rho(e_i)^2 = a_i$, *где* $a_i \in K, a_i = g(e_i,e_i)$
2. $\rho(e_i)\rho(e_j) = -\rho(e_j)\rho(e_i)$ *при* $i \neq j$

Первое соотношение следует из определения алгебры Клиффорда.

$$\rho(e_i + e_j)^2 = (\rho(e_i + e_j))^2$$

По определению $\rho(e_i + e_j)^2 = g(e_i + e_j, e_i + e_j) =$

$$= (g(e_i,e_i) + g(e_i,e_j) + g(e_j,e_i) + g(e_j,e_j) =$$
$$= a_i + g(e_i,e_j) + g(e_i,e_j) + a_j = a_i + a_j + 2g(e_i,e_j) = a_i a_j$$

С другой стороны

$$(p(e_i, +e_j))^2 = p(e_i, +e_j)\rho(e_i, +e_j) = (\rho(e_i) + \rho(e_j))(\rho(e_i) + \rho(e_j)) =$$
$$\rho(e_i)^2 + p(e_j)^2 + \rho(e_i)p(e_j) + \rho(e_j)p(e_i) = a_i + a_j + \rho(e_i)\rho(e_j) + \rho(e_j)\rho(e_i).$$

Из этих равенств получаем следующее равенство

$$a_i + a_j = a_i + a_j + \rho(e_i)\rho(e_j) + \rho(e_j)\rho(e_i)$$

Следовательно, $\rho(e_i)\rho(e_j) + \rho(e_j)\rho(e_i) = 0$.

Если алгебра Клиффорда $C(L)$ существует, то любой элемент из алгебры Клиффорда $C(L)$ разлагается по базису:

$$\{1, \rho(e_{i_1}), \rho(e_{i_1}) \cdot \rho(e_{i_2}), \rho(e_{i_1}) \cdot \rho(e_{i_2}) \cdot \rho(e_{i_3}), \ldots, \rho(e_{i_1}) \rho(e_{i_2}) \cdot \cdots \cdot (e_{i_2})\},$$

где $i_{1<\ldots<i_n}$.

1.3 Операции сопряжения и взятия следа от элемента алгебры Клиффорда

Комплексное сопряжение. Если элемент $U \in C(p,q)$ задан в виде разложения (4), то операцию комплексного сопряжения от элемента алгебры Клиффорда зададим формулой

$$\bar{U} = \bar{u}e + \bar{u}_a e^a + \sum_{a_1<a_2} \bar{u}_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \sum_{a_1<a_2<a_3} \bar{u}_{a_1 a_2 a_3} e^{a_1 a_2 a_3} + \ldots \tag{1}$$

В соответствии с этой формулой элементы базиса алгебры Клиффорда рассматриваются как вещественные величины, т.е. $e^{\bar{e}^{a_1 \ldots a_k}} = e^{a_1 \ldots a_k}$.

Если элемент $U \in C(p,q)$ записан в виде суммы элементов рангов от 0 до n

$$U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U}$$

то для него имеем

$$\bar{U} = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{\bar{U}} \tag{2}$$

Верно (предлагается удостовериться в этом в упражнении)

$$\bar{\bar{U}} = U, \quad (\overline{UV}) = \bar{U}\bar{V}, \quad (\overline{U+V}) = \bar{U} + \bar{V}, \quad (\overline{\lambda U}) = \bar{\lambda}\bar{U} \tag{3}$$

для произвольных элементов $U, V \in C(p,q)$, чисел $\lambda \in C$.

Реверс. Для элемента $U \in C(p,q)$, заданного в виде (2), определим операцию сопряжения называемую реверсом

$$U^{\sim} = \left(\sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U} \right)^{\sim} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \overset{k}{U} \tag{4}$$

1.4 Изометрия ортогонального пространства

Определение 6. *Пусть V - векторное пространство конечной размерности n над полем K*

Пусть $g(X,Y)$ - симметрическая билинейная форма на V со значениями в поле K.

Будем обозначать $g(X,Y)$ через (X,Y).

(X,Y) назовём спариванием.

Ядро спаривания определяется следующим образом:

$$Ker g = \{X(\forall Y),(X,Y)=0)\}.$$

Ортогональным пространством называется векторное пространство V с заданным спариванием (X, У).

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Ортогональное пространство невырожденным тогда и только тогда, когда*

$$G = det\,|g_{\mu\nu}| \neq 0$$

Докозательство теоремы 2. *Пусть V - невырожденное ортогональное пространство. Покажем, что определитель $G = det\,|g_{\mu\nu}| \neq 0$.*

Скалярное произведение в координатах имеет вид: $XY = g_{\mu\nu}X^{\mu}Y^{\nu}$. Запишем невырожденность векторного пространства V в координатах:

$$\{(\forall Y^{\nu}),(g_{\mu\nu}X^{\mu}Y^{\nu}=0 \to X^{\mu}=0)\}$$

Это эквивалентно следуюшему условию:

$$\{(\forall \nu),(g_{\mu\nu}X^{\mu}=0 \to X^{\mu}=0)\}$$

Это эквивалентно тому, что $G = \det|g_{\mu\nu}| \neq 0$.

2 Техника сверток в алгебрах Клиффорда

2.1 Свертки по элементам базиса фиксированного кватернионного типа

Очевидно, что для любого элемента β^A, кроме $\beta^{1\ldots n}$ в случае нечетного n и кроме e в случае любого n, найдется такой β^a, что β^A антикоммутирует β^A. Действительно, если A - четно, то в качестве a можно взять любой $a \in A$. Если A - нечетно, то в качестве а можно взять любой $a \notin A$. Выберем среди любой β^D и любой β^d, антикоммутирующий с β^D. Теперь домножим выражение слева на β^d, а справа на $\left(\beta^d\right)^{-1}\cdot$ Используя коммутируемость или антикоммутируемость элемента β^d, с элементами β^A, получим выражение того же вида, но где перед элементом $u_D\beta^D$ стоит знак минус, а перед некоторыми другими выражениями, возможно тоже поменялся знак. Сложим получившееся выражение и получим выражение вида, но без слагаемого $u_D\beta^D$ (и возможно без некоторых других слагаемых) и с другими константами. Далее продолжим тот же процесс - выбираем среди оставшихся в элементов β^A,один, выбираем антикоммутирующий с ним элемент β^a и продолжаем описанную процедуру.

В случае четного n процесс закончится тем, что при сложении на каком-то этапе двух уравнений, получим $e = 0$, т.е. противоречие.

2.2 Метод усреднения в теории представлений конечных групп

Теория представлений - полезный метод, поскольку она сводит проблемы абстрактной алгебры к проблемам линейной алгебры, предмета, который хорошо изучен. Кроме того, векторное пространство, на котором представлена группа (например), может быть бесконечномерным, и, допуская, что оно может быть, например, гильбертовым пространством, методы анализа могут быть применены к теории групп. Теория представлений также важна в физике, потому что, например, она описывает, как группа симметрии физической системы влияет на решения уравнений, описывающих эту систему.

Теория представлений широко распространена во всех областях математики по двум причинам. Во-первых, приложения теории представлений разнообразны: помимо ее влияния на алгебру, теория представлений:

- освещает и обобщает анализ Фурье с помощью гармонического анализа,
- связан с геометрией через теорию инвариантов и программу Эрлангена,
- оказывает влияние на теорию чисел через автоморфные формы и про-

грамму Ленглендса.

Используя алгебру свертки, мы можем реализовать Преобразование Фурье в группе ГРАММ. В районе гармонический анализ показано, что следующее определение согласуется с определением преобразования Фурье на R.

$$\hat{f}(\rho) = \sum_{s \in G} f(s)\rho(s).$$

$$\widehat{f * g}(\rho) = \hat{f}(\rho) \cdot \hat{g}(\rho).$$

Карты между представлениями

$$\begin{array}{ccc} V_\rho & \xrightarrow{T} & V_\tau \\ \downarrow_{\rho(s)} & & \downarrow_{\tau(s)} \\ V_\rho & \xrightarrow{T} & V_\tau \end{array}$$

3 Пример. Получение кватерниона из вектора и величины угла разворота.

Ещё раз - что такое кватернион? Для разработчика - это прежде всего инструмент, описывающий действие - поворот вокруг оси на заданный угол:

$$(w, vx, vy, vz),$$

где v- ось выраженная вектором; w - компонента, описывающая поворот (косинус половнны угла).

Положительное значение угла разворота означает поворот вдоль вектора по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора в его начало.

Например, кватернион поворота вдоль оси X на 90 градусов имеет следующие значения своих компонент: $\mathrm{w} = 0,7071; \mathrm{x} = 0,7071; \mathrm{y} = 0; \mathrm{z} = 0$. Левая или правая система координат, разницы нет - главное, чтобы все операции выполнялись в одинаковых системах координат, или все в левых или все в правых.

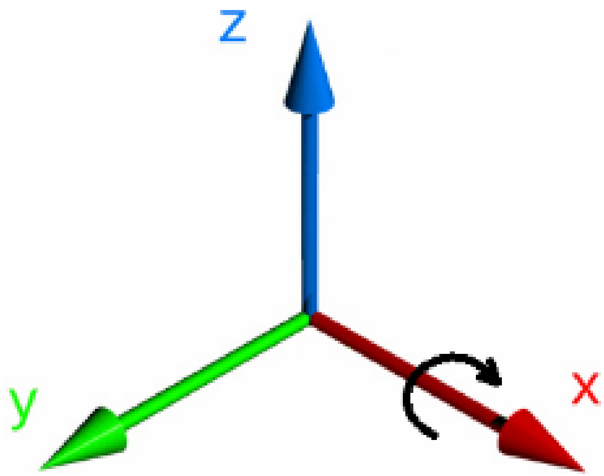

Рисунок 1

С помошью следуюшего кода, указанного в приложении А, который был написан на Visual Basic, мы можем получить кватернион из вектора и угла разворота вокруг него.

Обратный кватернион

Для того, чтобы умножить кватернион на 3D вектор, нужно вектор преобразовать в кватернион присвоив компоненте $W = 0$ и умножить кватернион на кватернион. Или подставить ноль и выразить это в виде функции.

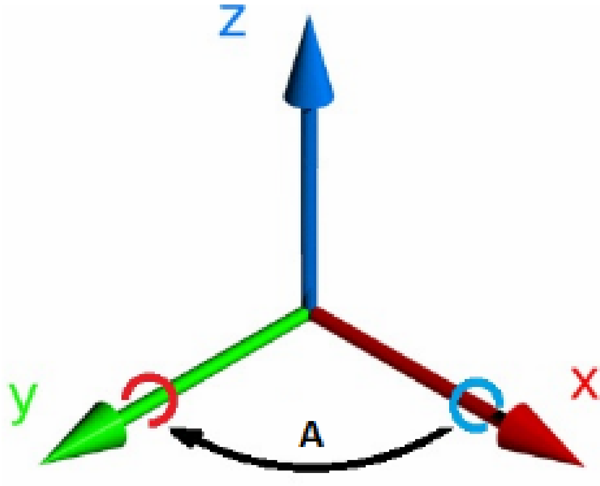

Рисунок 2

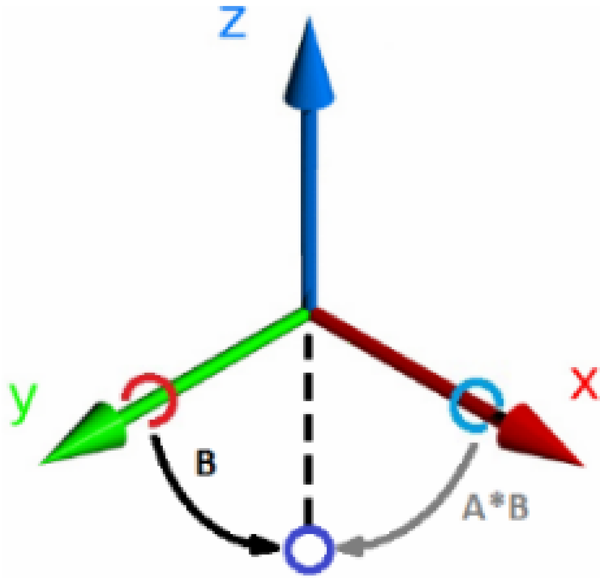

Рисунок 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были исследованы некоторые вопросы теории алгебр Клиффорда, возникающие в математической физике, в частности, в теории поля. Была установлена связь между двумя наборами элементов алгебры Клиффорда, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, и найден алгоритм для вычисления явного вида элемента, осуществляющего эту связь. Так же применили полученные результаты для изучения связи спинорных и ортогональных групп, а именно, получили явные формулы для вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп. Основные результаты являются новыми. Они заключаются в следующем: предложен метод вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам соответствующих ортогональных групп при двулистном накрытии; развит метод усреднения из теории представлений конечных групп для алгебр Клиффорда (сверток, построенных по двум наборам антикоммутирующих элементов). Так же был написан код на Visual Basic, с помощью которого мы можем получить кватернион из вектора и угла разворота вокруг него.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

2 А. И. Астровский / Высшая математика, Е. В. Воронкова, О. П. Степанович: учебно-методический комплекс. – Минск: Издательство МИУ, 2009. – 383 с.

3 К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – Москва: Флинта: МПСИ, 2010. – 359 с.

4 Высшая математика: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Г. Л. Луканкин [и др.]. – Москва: Высшая школа, 2009. – 583 с.

5 Краткий курс высшей математики: учебник / К. В. Балдин [и др.]. – Москва: Дашков и К$^{\underline{o}}$, 2012. – 510 с.

6 Кундышева, Е. С. Математика: учебник / Е. С. Кундышева. – Москва: Дашков и К$^{\underline{o}}$, 2011. – 561 с.

7 Малыхин, В. И. Высшая математика: учебное пособие / В. И. Малыхин. – Москва: Инфра-М, 2010. – 363 с.

8 Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 204 с.

9 Шипачев, В. С. Основы высшей математики: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – Москва: Юрайт, 2009. – 478 с.

10 Антонов, В.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: Учебник / В.И. Антонов. - М.: Проспект, 2011. - 144 с.

11 Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: Инфра-М, 2017. - 224 с.

12 Босс, В. Лекции по математике: Линейная алгебра / В. Босс. - М.: Ленанд, 2019. - 224 с.

13 Бурмистрова, Е.Б. Линейная алгебра: Учебник и практикум для академического бакалавриата / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 421 с.

14 Геворкян, П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П.С. Геворкян. - М.: Физматлит, 2014. - 208 с.

15 Головина, Л., И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учебное пособие для вузов / Л. И. Головина. - М.: Альянс, 2016. - 392 с.

16 Гомонов, С.А. Математика. Линейная алгебра: Учебно-справочное пособие / С.А. Гомонов. - М.: Форум, НИЦ Инфра-М, 2013. - 144 с.

17 Горбаченко, В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB / В.И. Горбаченко. - СПб.: BHV, 2011. - 320 с.

18 Горлач, Б.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2017. - 300 с.

19 Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: Учебное пособие / А.А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 288 с.

20 Демидович, Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х т.Т. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для втузов / Б.П. Демидович. - М.: Альянс, 2011. - 480 с.

21 Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: Учебное пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. - М.: КноРус, 2013. - 608 с.

22 Зырянов, Ю.Т. Линейная алгебра в задачах и упражнениях: Учебное пособие / Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин, О.А. Белоусов и др. - СПб.: Лань, 2016. - 592 с.

23 Ильин, В.А. Линейная алгебра: Учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - М.: Физматлит, 2014. - 280 с.

24 Кадомцев, С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебное пособие для вузов / С. Кадомцев. - М.: Физматлит, 2011. - 168 с.

25 Казакова, Т., А. Линейная алгебра: Учебное пособие / Т. А. Казакова. - СПб.: Лань П, 2016. - 384 с.

26 Клетеник, Д.В. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Часть II: Учебное пособие / Д.В. Клетеник. - СПб.: Лань П, 2016. - 400 с.

27 Кострикин, А.И. Введение в алгебру. ч 2. Линейная алгебра / А.И. Кострикин. - М.: МЦНМО, 2012. - 367 с.