МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

Теорема Нётер

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Скрипниковой Екатерины Сергеевны

Научный руководитель
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2023

Введение. Перед автором работы была поставлена цель исследовать некоторые методы интегрирования гамильтоновых систем. Для достижения поставленной цели были решены следующие основные задачи:

1) Приведены основные понятия геометрии симплектических многообразий;

2) Введена симплектическая структура на кокасательном расслоении гладкого многообразия;

3) Приведено подробное доказательство теоремы Нетер.

Помимо основных задач решались и другие интересные задачи. Так, например, было доказано, что гамильтонова система с гамильтонианом специального строения, определяемая на кокасательном расслоении риманова многообразия, является геодезическим потоком: ее интегральные кривые проецируются в геодезические кривые риманова многообразия. В качестве вспомогательного результата было доказано существование поля Лиувилля – полного лифта произвольного векторного поля в кокасательное расслоение многообразия.

Теорема Нётер является важным практическим инструментом, который позволяет получить значительную информацию о свойствах решений системы дифференциальных уравнений, основываясь лишь на их симметрии. Описанный подход представляет собой один из методов интегрирования дифференциальных уравнений. В некоторых случаях этот метод помогает находить первые интегралы системы, что легче всего проанализировать уравнения, описывающие движение соответствующей механической системы.

Теорема Нётер нашла широкое применение в различных областях физики и математики. Ее применение позволило решать задачи, которые до этого были неразрешимы. Она также помогла в создании новых моделей, которые используются в настоящее время для описания сложных процессов в физике и других науках.

Основное содержание работы. Систему дифференциальных уравнений Гамильтона можно смоделировать векторным полем на симплектическом многообразии, изучению которого полезно предпослать знакомство с симплектическим линейным пространством, которым оказывается каждое касательное пространство к симплектическому многообразию.

Введем ряд основных понятий, необходимых для рассмотрения симплектического линейного пространства.

Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $dim\, V = n$.

Определение 1.1. Отображение $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, называется *билинейной формой* на V.

Линейность по первому аргументу означает,что:

1. $\omega(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y}) = \omega(\vec{x_1}, \vec{y}) + \omega(\vec{x_2}, \vec{y})$ для любых векторов $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y} \in V$;
2. $\omega(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda\omega(\vec{x}, \vec{y})$ для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Линейность по второму аргументу проводится аналогично.

Определение 1.2. Билинейная форма ω называется *невырожденной*, если в линейном пространстве V не существует ненулевого вектора $\vec{x}$, такого, что для любого вектора $\vec{y} \in V$ выполняется равенство

$$\omega(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \tag{3}$$

В противном случае форма ω называется *вырожденной*.

Определение 1.3. Билинейная форма ω называется *кососимметрической*, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$: $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = -\omega(\vec{y}, \vec{x})$. Для кососимметрической формы $\omega(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = -\omega(\vec{e_j}, \vec{e_i})$, то есть $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Следовательно, матрица $\Omega = (\omega_{ij})$ кососимметрической билинейной формы является кососимметрической.

А теперь, непосредственно, перейдем к понятию симплектического линейного пространства.

Определение 1.4. Линейное пространство V называется *симплектическим*, если на нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω.

Эту форму мы будем называть симплектической структурой на линейном пространстве V.

Если в V выбран базис $e_1, ..., e_n$, то форма ω однозначно задается своей матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$, где $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Эта матрица кососимметрична и невырождена. Отсюда сразу следует, что размерность симплектического пространства V четна, поскольку

$$det\,\Omega = det\,\Omega^T = det(-\Omega) = (-1)^n det\,\Omega,$$

где $n = dim\,V$.

В пространстве V существует базис $\bar{e_1}, ..., \bar{e_n}, f_1, ..., f_n$, в котором матрица симплектической формы Ω имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где $E = E_n$ - единичная матрица размера $n \times n$. Такой базис будем называть каноническим или симплектическим.

Далее определим симплектическое многообразие и стандартную симплектическую структуру в кокасательном расслоении. Все понятия, которые необходимы в дальнейшей работе можно найти в книге Годбийона "Дифференциальная геометрия и аналитическая механика".

Определение 2.7. Пусть M^{2n}- четномерное дифференцируемое многообразие. *Симплектическим многообразием* на M^{2n}- называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω на M^{2n}:

Замкнутость означает, что $d\omega = 0$. Форма называется невырожденной, если для любой точки x и любого ненулевого $u \in T_x(M)$, форма не равна тождественно нулю, т.е. существует $v \in T_x(M)$ и $\omega(u, v) \neq 0$.

Покажем, что кокасательное расслоенное пространство $T^*(M)$ над n - мерным многообразием M является симплектическим многообразием.

Иначе говоря, с каждым многообразием M можно связать симплектическое многообразие вдвое большей размерности - кокасательное расслоение.

Рассмотрим функцию q, являющаяся канонической проекцией:

$$q : T^*(M) \to M,$$

где каждой 1-форме $\alpha \in T^*_x(M)$ ставится в соответствие точка $x \in M$, то есть:

$$q : \alpha \to x.$$

Пусть $x^1, ..., x^n$ - локальные координаты функции на M. Тогда так называемые предпочитаемые координатные функции на соответствующей области пространства $T^*(M)$ определяются следующим образом:

$$q^i = x^i \circ q, \;\; p_j = \frac{\partial}{\partial x^i}, \;\; p_j(\alpha) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Оказывается, что на многообразии $T^*(M)$ естественным образом задается симплектическая структура. Для этого сначала строится так называемая форма Лиувилля (1-форма действия) на $T^*(M)$. Пусть α точка многообразия $T^*(M)$, то есть линейная форма в пространстве $T_{q(\alpha)}(M)$. Рассмотрим касательное пространство $T_\alpha(T^*(M))$ в этой точке к многообразию $T^*(M)$ и определим в нем линейную форму λ_α следующим образом.

Пусть $\vec{\xi}$ касательный вектор в точке α к многообразию $T^*(M)$. Применим к нему касательное отображение к канонической проекции, то есть:

$$q_* : T_\alpha(T^*(M)) \to T_{q(\alpha)}(M).$$

Получим касательный вектор в точке $q(\alpha)$ к многообразию M. Геометрическая интерпретация вышесказанного представлена на рисунке 2.1.

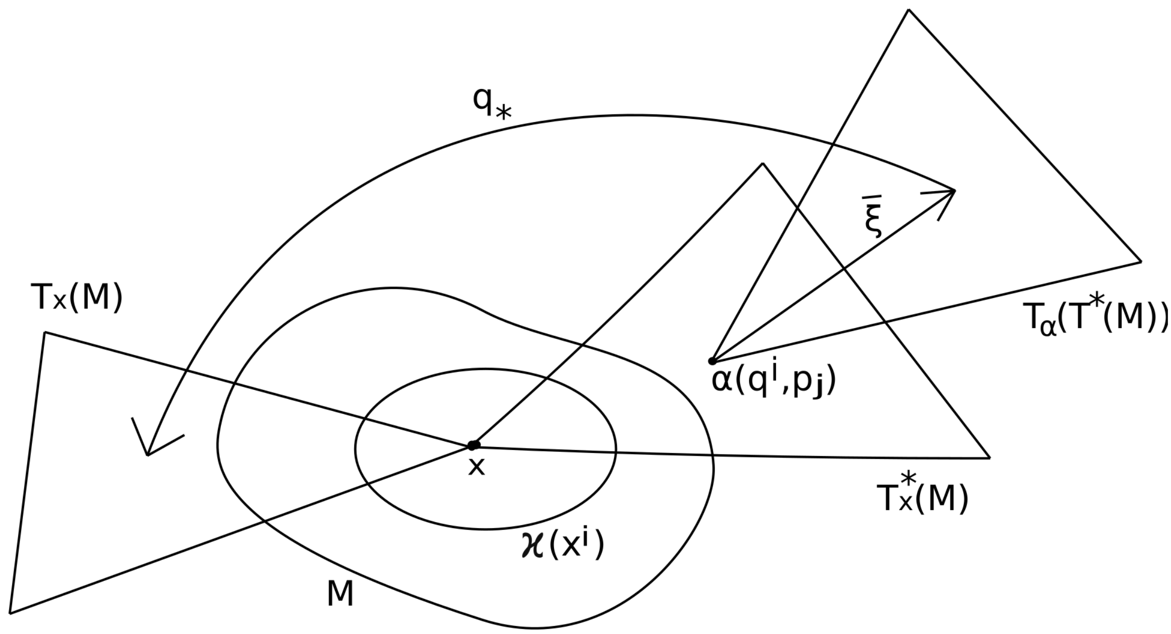

Рисунок 2.1.

Наконец, возьмем значение формы α на этом векторе. Обозначим его $\lambda_\alpha(\vec{\xi})$. Таким образом,

$$\lambda_\alpha(\vec{\xi}) = \alpha(q_*(\vec{\xi})).$$

Так как α и q_* линейны, то и λ_α также линейное отображение

$$\lambda_\alpha : T_\alpha(T^*(M)) \to \mathbb{R}.$$

Итак, мы получили линейную форму в каждой точке многообразия $T^*(M)$. Остается доказать, что построенное поле форм на $T^*(M)$ дифференцируемо. Для этого перейдем к локальным координатам. В локальных координатах q^i, p_j, имеем разложение λ по базису ($2n$ - слагаемых):

$$\lambda = \lambda_i dq^i + \lambda^j dp_j,$$

где

$$\lambda_i = \lambda_i(q^i, p_j), \quad \lambda^j = \lambda^j(q^i, p_j).$$

Найдем функции λ_i, λ^j в явном виде:

$$\lambda_i = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \alpha\left(q_*\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \alpha_i = p_i;$$
$$\lambda^j = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \alpha\left(q_*\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \alpha(0) = 0.$$

Таким образом,

$$\lambda = p_j dq^i,$$

откуда видно, что построенная форма дифференцируема. Теперь симплектическая структура на многообразии $T^*(M)$ задается формой:

$$\omega = d\lambda$$

или в локальных координатах

$$\omega = dp_j \wedge dq^i.$$

Из чего следует, что форма ω замкнута и невырождена. Таким образом, мы получаем, что $(T^*(M), \omega)$- симплектическое многообразие.

Так как касательное пространство к симплектическому многообразию является симплектическим линейным пространством, то определено послойное отображение, которое определяет изоморфизм линейных пространств векторных полей и линейных дифференциальных форм многообразия M^{2n}:

$$I_\omega : \Xi(M^{2n}) \to \Lambda^*(M^{2n}).$$

Определим гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии, являющиеся эффективным инструментом интегрирования этих полей.

Определение 2.10. Форма α называется *точной*, если ее можно представить как дифференциал некоторой $(k-1)$ - формы, то есть $\exists\, \mu : d\mu = \alpha$.

Векторное поле $\vec{\xi}_\alpha$, соответствующее замкнутой линейной дифференциальной форме α, называется *локально гамильтоновым.* В случае, если эта форма $\alpha = -dH$ точна, то векторное поле $\vec{\xi}_{\alpha H}$, обозначаемое также $\vec{\xi}_H$, где

$$i_{\vec{\xi}_H}\omega = -dH$$

будем называть *гамильтоновым с гамильтонианом* H. Знак минус берется для несущественного согласования с классическим представлением в координатах соответствующей гамильтоновой системы дифференциальных уравнений, которая принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y^i}; \\ \dfrac{dy^j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^j}. \end{cases}$$

где $H = H(x^i, y^j)$, а $x^i = x^i(t)$ и $y^j = y^j(t)$ - неизвестные функции.

Найдем теперь гамильтоново поле с гамильтонианом H в координатах Дарбу q^i, p_k с симплектической формой $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Пусть

$$\vec{\xi}_H = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad i, k = 1, ..., n$$

гамильтоново поле, соответствующее дифференциалу

$$-dH = -\frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k.$$

Тогда

$$-\tfrac{\partial H}{\partial q^i} = (I_\omega(\vec{\xi}_H)) = \omega\left(\vec{\xi}_H, \tfrac{\partial}{\partial q^i}\right) = dp_k \wedge dq^k \left(\vec{\xi}_H, \tfrac{\partial}{\partial q^i}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} dp_k(\vec{\xi}_H) & dp_k\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \\ dq^k(\vec{\xi}_H) & dq^k\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\vec{\xi}_H)_k & 0 \\ (\vec{\xi}_H)^k & \delta_i^k \end{vmatrix} = (\vec{\xi}_H)_i.$$

Далее,

$$-\frac{\partial H}{\partial p_k} = \omega\left(\vec{\xi}_H, \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = -\vec{\xi_H^k}.$$

Таким образом, система уравнений интегральных кривых гамильтона поля будет иметь вид:

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

то есть она совпадает с гамильтоновой системой дифференциальных уравнений.

Стандартный путь к интегрированию, в частности, гамильтоновых уравнений лежит через нахождение первых интегралов. Один из методов нахождения первых интегралов гамильтонова векторного поля связан с теоремой Э.Нётер. Но прежде чем формулировать теорему, введем в рассмотрение некоторое понятие, которое назовем лифтом Лиувилля векторного поля на пространстве M^n. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *(Поле Лиувилля.)* Для всякого векторного поля $\vec{u}$ на многообразии M^n существует и притом единственное векторное поле $\vec{v}$ на многообразии $T^*(M^n)$ такое, что:

$$1. q_*(\vec{v}) = \vec{u},$$

$$2. L_{\vec{v}}\lambda = 0.$$

При доказательстве данной теоремы мы получаем, что полный лифт векторного поля Лиувилля имеет вид:

$$\vec{v} = u^i \partial_i - p_j \partial_i u^j \partial^i.$$

Перейдем к формулировке и доказательству центральной теоремы.

Теорема 3.2. *(Нётер.)* Пусть $\vec{\xi}_H$ - гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*(M)$. Пусть $\vec{v}$ поле Лиувилля. Если поле $\vec{v}$ удовлетворяет условию: $dH(\vec{v}) = 0$, то $\lambda(\vec{v})$ является первым интегралом поля $\vec{\xi}_H$ рис.3.1.

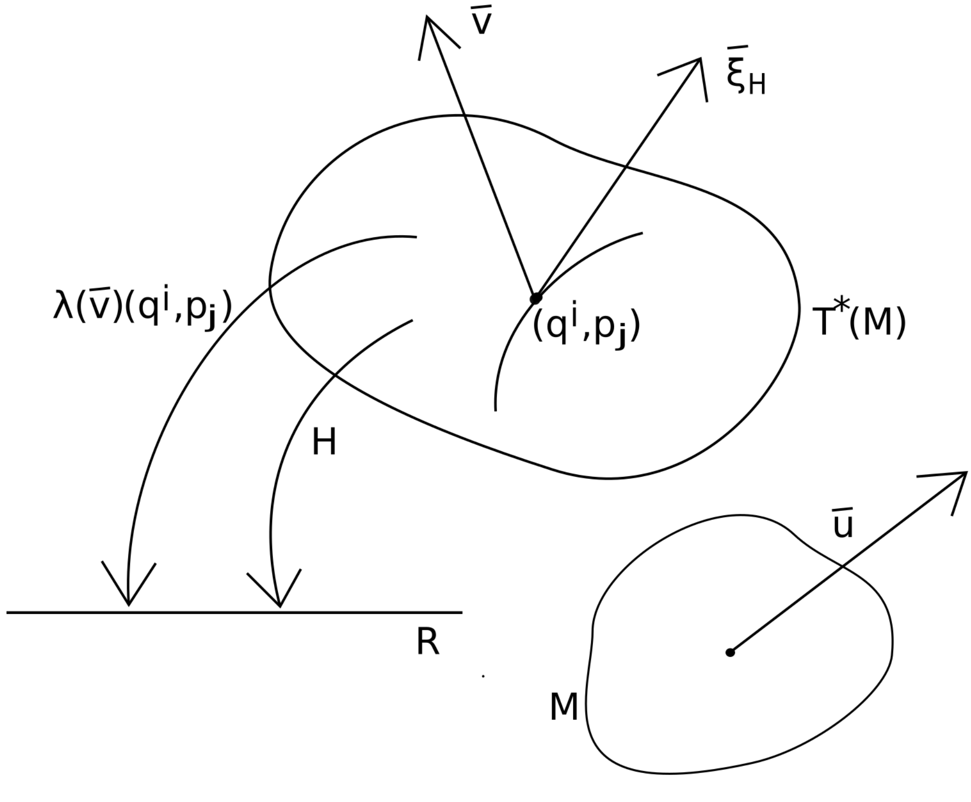

Рисунок 3.1.

Центральным местом доказательства является теорема о поле Лиувилля. Вместе с ней используются определения первого интеграла и производной Ли.

Заключение. В данной работе были изложены основные понятия, связанные с симплектическим линейным пространством, рассмотрены гамильтоновы векторные поля. Показали, что кокасательное расслоение является симплектическим многообразием и на основе этого доказали центральную теорему, которая является одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Теорема Нётер дает наиболее простой и универсальный метод получения законов сохранения в классической и квантовой механике, теории поля и другие. Особенно важное значение имеет теорема Нётер в квантовой теории поля, где законы сохранения, вытекающие из существования определенной группы симметрии, являются часто основным источником информации о свойствах изучаемых объектов.