МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

Изложение векторного анализа на языке внешних форм

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Пахомовой Валерии Сергеевны

Научный руководитель
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2023

Введение. «Векторный анализ и основы тензорного анализа» является основной учебной дисциплиной на физическом факультете благодаря активному использованию тензорных методов в механике и физике. Основными понятиями этой учебной дисциплины являются ротор, градиент и дивергенция. Обычно изложение предмета разбивается на три этапа. На первом этапе дается определение основных понятий. На втором этапе изучаются свойства ротора, градиента и дивергенции. Основной упор в этой части делается на изучении координатных представлений изучаемых объектов. При этом криволинейные координаты (как правило, сферические и цилиндрические) используются наравне с декартовыми координатами. На третьем этапе изучаются приложения ротора, градиента и дивергенции в физике.

Имеется большое количество учебников и учебных пособий по данному предмету. Особое место среди учебников занимает книга И.В. Арнольда «Математические методы классической механики». В своей книге в очень краткой форме (весь материал помещается на одной странице) Арнольд предлагает свой подход к введению основных понятий векторного анализа.

Мы поставили перед собой задачу развить идеи Арнольда, написав работу, которую можно было бы легко расширить до полноценного учебника по векторному анализу. Особенностью изложения «по Арнольду» является активное использование при введении ротора, градиента и дивергенции внешних дифференциальных форм.

В первой главе вводятся основные понятия линейной алгебры. Во второй главе доказываются две теоремы о канонических изоморфизмах. В третьей главе вводится понятие трехмерного риманова пространства и рассматриваются соотношения между векторными полями и дифференциальными формами. В четвертой главе показано выражение градиента, ротора и дивергенции с помощью двух канонических изоморфизмов. В последней главе рассматривается трехмерное евклидово пространство, как частный случай риманова и находятся разложения градиента, ротора и дивергенции в трех разных системах координат.

Содержание. Для переопределения градиента, ротора и дивергенции используются две теоремы по каноническим изоморфизмам и дифференциальные формы. Сначала нужно дать основные определения из линейной алгебры.

Определение 1.1 Множество V элементов произвольной природы, называемых векторами и обозначаемых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$, называется линейным пространством, если:

1) имеется правило (внутренняя операция), позволяющее с любыми двумя элементами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V сопоставить третий элемент $\bar{z}$ из V называемый суммой элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и обозначаемый $\bar{x} + \bar{y}$;

2) имеется правило (внешняя операция), позволяющее найти для каждого действительного или комплексного числа α и любого элемента $\bar{x}$ из V другой элемент $\bar{y}$ из V называемый произведением $\bar{x}$ на число α и обозначаемый $\alpha\bar{x}$.

При этом правила (операции) 1 и 2 должны удовлетворять следующим условиям (аксиомам):

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ для любых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V (закон коммутативности);

2) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$ для любых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V (закон ассоциативности);

3) существует в V элемент $\bar{0}$ (нуль-вектор), такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из V;

4) для каждого $\bar{x}$ из V существует в V элемент $\bar{y}$, такой, что $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$ (элемент $\bar{y}$ называется противоположным элементу $\bar{x}$);

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из V;

6) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из V и любых действительных чисел α и β;

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ для любых чисел α и β и любого $\bar{x}$ из V

8) $\alpha(\bar{x} + \bar{y})$ для любых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V и любого числа α.

Определение 1.6 Сопряженным пространством V^* называется пространство во всех линейных функций заданных на пространстве V.

$$V^* = \alpha|\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Сопряженное пространство V^* имеет ту же размерность, что и пространство V. Следовательно, пространства V и V^* изоморфны.

Понятие билинейной формы:

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $dimV = n$.

Отображение $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, линейное по каждому своему аргументу, называется билинейной формой на V .Билинейная форма каждой упорядоченной паре векторов $(\bar{x}, \bar{y})$ ставит в соответствие число $g(\bar{x}, \bar{y})$. Билинейная форма — это вещественная функция двух векторных аргументов.

Множество всех билинейных форм образует векторное пространство относительно операций сложения билинейных форм и умножения билинейной формы на число.

Понятие полилинейной формы:

Отображение φ r-й декартовой степени множества V во множество действительных чисел, линейное по каждому своему аргументу, называется полилинейной формой или r-формой на V :

$$\varphi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ раз}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Заметим, что при $r = 1$ мы получим линейную форму (1-форму), а при $r = 2$ — билинейную форму (2-форму).

И наконец подходим к понятию внешней формы:

Определение 1.7 Пусть E- конечномерное вещественное вещественное линейное пространство, $dim\, E = n$, и пусть $k \in \mathbb{N}$. Внешней k-формой на E называется отображение:

$$\omega : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ раз}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

являющееся полилинейным:

$$\omega(x_1, \ldots, \alpha_1 x_i^2, \ldots, x_k) =$$

$$= \alpha_1 \omega(x_1, \forall, x_i^1, \ldots, x_k) + \alpha_2 \omega(x_1, \forall, x_i^2, \ldots, x_k), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

и кососимметрическим:

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) =$$

$$= -\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k), \qquad i, j = 1, \ldots k.$$

Множество всех внешних k-форм на E обозначается через $\Lambda^k E$. В силу кососимметричности любая внешняя форма степени $k > n$ равна нулю, т.е. $\Lambda^k E = 0$ при $k > n$.

Определение 2.1 Два евклидовых пространства E_N и $E_N^{'}$ называются изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие Φ, такое что :

$$1.\ \Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y),$$

$$2.\ \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x),$$

$$3.\ (x, y) = (\Phi(x), \Phi(y)),$$

где λ - произвольное вещественное число.

Первые два условия означают, что E_N и $E_N^{'}$ изоморфны как линейные пространства, третье условие означает, что при изоморфизме Φ сохраняется скалярное произведение.

Также отображение двух линейных пространств $\Phi : E_N \longrightarrow \Lambda^1 E_N$ называется линейным отображением, или линейным оператором, если выполняются первые 2 свойства (опр.) (свойства линейности). Из этого следует, что изоморфизм — это линейное отображение, являющееся биекцией.

Определение 2.2 Изоморфизм двух линейных пространств называется естественным изоморфизмом, если он устанавливается без применения понятия базиса.

Множество всех k-форм превращается в вещественное линейное пространство, если определить операцию сложения форм и операцию умножения формы на скаляр естественным образом. Известно, что размерность этого пространства равна C_N^K

Теперь рассмотрим евклидово линейное пространство E_N размерности N с метрической формой $g(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$, которая является положительно определенной. В этом пространстве каждому вектору $\vec{a} \in E_N$ можно поставить в соответствие 1-форму $\omega^1_{\vec{a}}$ следующим образом

$$\omega^1_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\vec{a},\vec{x}), \ (\forall \vec{x} \in E_N). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1 Отображение $a \xrightarrow{\Phi} \omega^1_{\vec{a}}$ является изоморфизмом линейного пространства E_N векторов $\vec{a}$ в линейное пространство 1-форм $\Lambda^1(E_N)$.

Доказательство теоремы основывается на двух свойствах:

1) линейность отображения

2) инъективность отображения

Замечание к теореме, из линейной алгебры известно, что линейное и инъективное отображение одного линейного пространства в другое линейное пространство той же размерности является изоморфизмом.

Известно, что размерность линейного пространства 1-форм $dim\Lambda^1(E_N) = C^1_N = N$. Следовательно, отображение Φ является изоморфизмом, теорема 1 доказана.

Рассмотрим трехмерное ориентированное евклидово линейное пространство E_3. В этом пространстве можно ввести смешанное произведение векторов.

Определение 2.2 Смешанным произведением тройки векторов a, b и c называется число $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b},\vec{c})$, где первые два сомножителя перемножаются векторно.

В трехмерном ориентированном евклидовом линейном пространстве E_3 каждому вектору $a \in E_3$ поставим в соответствие 2-форму $\omega^2_{\vec{a}}$, которая определяется следующим образом

$$\omega^2_{\vec{a}}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{a},\vec{x},\vec{y}), \ (\forall x, y \in E_3). \tag{2.2}$$

Теорема 2.2 Отображение $a \xrightarrow{\psi} \omega^2_{\vec{a}}$ является изоморфизмом линейного пространства E_3 векторов a в линейное пространство 2-форм $\Lambda^2(E_3)$.

Доказательство теоремы основывается на двух свойствах:

1) линейность отображения

2) инъективность отображения

Итак, ввели канонические изоморфизмы. Теперь нужно подойти к понятию дифференциальных форм.

Введем в рассмотрение трехмерное ориентированное риманово пространство V_3 с метрическим тензором g_{ij}. В каждой точке риманова пространства V_3 касательное пространство является ориентированным трехмерным евклидовым пространством E_3. Рассмотрим векторное поле A на римановом пространстве V_3. Каждому значению этого векторного поля в силу канонических изоморфизмов поставим в соответствие дифференциальную 1-форму $\omega^1_{\vec{A}}$, и дифференциальную 2-форму $\omega^2_{\vec{A}}$, по формулам (2.1) и (2.2). В результате получим векторное поле A, которому соответствует дифференциальная 1-форма $\omega^1_{\vec{A}}(\xi) = (A, \xi)$ и дифференциальная 2-форма $\omega^2_{\vec{A}}(\xi, \eta) = (A, \xi, \eta)$.

Пусть локальная система координат $(u^i), i = 1, 2, 3$ порождает базис $\frac{\delta}{\delta u^i}, i = 1, 2, 3$. Векторное поле в пределах этой карты имеет вид $A = A(u^i)\frac{\delta}{\delta u^i}$, где $A(u^i)$-дифференциальные функции. Соответствующая векторному полю A 1-форма $\omega^1_{\vec{A}}$ раскладывается по базису du^i,а соответствующая 2-форма $\omega^2_{\vec{A}}$-по базису $du^i \wedge du^j$, где $i < j$.Найддем эти разложения 1-формы $\omega^1_{\vec{A}}$ и 2-формы $\omega^2_{\vec{A}}$, использую формулы (2.3) и (2.4).

$$\omega^1_{\vec{A}} = g_{i1}A(u^i)du^1 + g_{i2}A(u^i)du^2 + g_{i3}A(u^i)du^3,$$

$$\omega^2_{\vec{A}} = A(u^3)(\frac{\delta}{\delta u^1}, \frac{\delta}{\delta u^2}, \frac{\delta}{\delta u^3})du^1 \wedge du^2 - A(u^2)(\frac{\delta}{\delta u^1}, \frac{\delta}{\delta u^2}, \frac{\delta}{\delta u^3})du^3 \wedge du^1 +$$

$$+A(u^1)(\frac{\delta}{\delta u^1}, \frac{\delta}{\delta u^2}, \frac{\delta}{\delta u^3})du^2 \wedge du^3.$$

Так как g_{ij} и $A(u^i)$ дифференциальные функции, то все коэффициенты дифференциальные функции. Значит, 1-форма и 2-форма являются дифференциальными формами.

Если u^i и $A(u^i)$ дифференциальные функции, то все коэффициенты дифференциальные функции. Значит, 1-форма и 2-форма являются дифференциальными формами.

Все основные определения даны, теперь можно перейти к переопределению градиента, ротора и дивергенции.

Рассмотрим трехмерное ориентированное риманово пространство V_3. Основные понятия векторного анализа, а именно градиент, ротор и дивергенцию определим с помощью операции внешнего дифференцирования.

Рассмотрим скалярное поле f на V_3. Применим операцию внешнего дифференцирования df, получим инвариант, который является формой 1-го порядка. В силу установленного в теореме 1 изоморфизма, перейдем к векторному полю. Это векторное поле определяет градиент скалярного поля f, т.е.

$$df = \omega^1_{gradf}. \qquad (4.1)$$

2) Возьмем векторное поле A на V_3. У нас имеется соответствие между векторными полями и дифференциальными формами 1-го порядка. Используя это соответствие, получим дифференциальную 1-форму $\omega^1_{\vec{A}}$. Рассмотрим внешний дифференциал этой формы, получим, форму 2-го порядка $d\omega^1_{\vec{A}}$. В силу изоморфизма, доказанного в теореме 2.2, имеем векторное поле, которое определяет ротор векторного поля A, т.е.

$$df\omega^1_A = \omega^2_{rotA}. \qquad (4.2)$$

3) Также у нас имеется соответствие между векторными полями и дифференциальными 2-формами. Используя это соответствие, получим дифференциальную 2-форму ω^2_A, соответствующую векторному полю A. Применим операцию внешнего дифференцирования к ω^2_A, получим форму 3-го порядка $d\omega^2_A$. Скаляр соответствующий 2-форме определяет дивергенцию векторного поля A, т.е.

$$df\omega^2_A = \omega^3_{divA}. \qquad (4.3)$$

Таким образом, мы определили операции градиента, ротора и дивергенции. Они имеют важное значение, поэтому рассмотрим некоторые их свойства:

1) $div\vec{a}A = (grad\vec{a}, A) + adivA$;

2) $rot\vec{a}A = (grad\vec{a} \times A) + \vec{a}rotA$;

3) $div(A \times B) = (rotA, B) - (rotB, A)$.

Заключение. В данной работе были изложены основные понятия линейной алгебры, векторного анализа и тензорного анализа. Рассмотрены две теоремы о канонических изоморфизмах и дифференциальные формы, что помогло в переопределении ротора, градиенты и дивергенции. Заложенные основы идеи в учебнике Арнольда, реализованы.