МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Классификация компактных ориентированных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Васильевой Виктории Владимировны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Б. Поплавский
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2023

Введение. Топологическое понятие поверхности, или двумерного многообразия, — это некая математическая абстракция представления о поверхности, рассматривая как поверхность из любого тонкого материала (бумага, лист металла, пластик). Поверхность, или двумерное многообразие, — это топологическое пространство, обладающее теми же локальными свойствами, что и плоскость в евклидовой геометрии. Данная работа посвящена раскрытию связей фундаментальной группы с теорией групп. Результаты, изложенные в ней, могут использоваться, кроме алгебраической топологии, и в некоторых других областях математики, таких, как дифференциальная геометрия, теория групп Ли, теория римановых поверхностей и теория узлов.

Основная цель работы заключается в классификации компактных ориентированных поверхностей. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Дать определения понятий ориентированной и ориентируемой поверхности;
2. Определить понятие триангуляции и рассмотреть примеры;
3. Исследовать основные свойства нормальных форм компактных ориентированных поверхностей;
4. Рассмотреть гомеоморфные образы компактных ориентированных поверхностей.

Основное содержание работы. В первой главе сформулировано понятие фактортопологии, так как на его основе строится дальнейшее определение триангуляции. X — топологическое пространство, Y — некоторое множество и $f: X \to Y$ — отображение пространства X на Y. Фактортопология на множестве Y, задаваемая отображением f (называемая также топологией отождествления на Y, задаваемая отображением f), определяется следующим образом: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ —

открытое подмножество пространства X.

Обращаем внимание на то, что фактортопология — сильнейшая топология на Y, в которой отображение f непрерывно, именно поэтому в определениях используем именно ее. Если Y имеет фактортопологию, задаваемую отображением $f: X \to Y$, то условие о замкнутости или открытости отображения f часто бывает полезным предположением.

Во второй главе формулируем понятие ориентируемости. Ориентацией плоскости и пространства называется класс отношения одинаковой ориентации базисов на плоскости и в пространстве соответственно. Для начала определим элементарную поверхность. Множество Ф точек пространства мы будем называть элементарной поверхностью, если оно является образом элементарной области на плоскости при топологическом отображении ее в пространство. n-мерным многообразием называется хаусдорфово пространство (т. е. пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_2), каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому n-мерному диску

$$U^n = \{x \in R^n: |x| < 1\}.$$

Ориентацию евклидовой плоскости R^2 или, более общим образом, любой малой области в плоскости можно задать различными способами. Например, можно указать, какая из двух возможных систем координат на плоскости должна считаться правосторонней, а какая — левосторонней. Другой способ: задать, какое направление вращения в плоскости вокруг некоторой точки должно считаться положительным, а какое — отрицательным.

Простейшим примером двумерного многообразия, иллюстрирующим это явление, служит хорошо известный лист Мёбиуса. Для получения листа Мёбиуса достаточно склеить концы длинного узкого прямоугольного листа бумаги, повернув один из концов на 180°. Математически лист Мёбиуса — это топологическое пространство, описываемое следующим образом. Обозначим через X прямоугольник

$$X = \{(x, y) \in R^2 : -10 \le x \le +10, -1 < y < +1\}.$$

Построим факторпространство пространства X, отождествляя точки $(10, y)$ и $(-10, -y)$ для $-1 < y < +1$. Заметим, что две границы прямоугольника, соответствующие $y = +1$ и $y = -1$, не включаются.

2-многообразие называется ориентируемым, если каждый замкнутый путь сохраняет ориентацию; связное 2-многообразие называется неориентируемым, если существует по крайней мере один путь, меняющий ориентацию.

Для связных n-мерных многообразий можно определить понятия ориентируемости и неориентируемости. Евклидово n-пространство R^n и n-сфера S^n дают примеры ориентируемых n-многообразий. Легко определить n-мерное обобщение листа Мёбиуса, которое является неориентируемым n-мерным многообразием. Оно гомеоморфно произведению обычного двумерного листа Мёбиуса и $(n-2)$-мерного открытого диска U^{n-2}.

В третьей главе рассматриваем триангуляцию компактных поверхностей. Связное 2-многообразие будем называть для краткости поверхностью. Простейшим примером компактной поверхности служит 2-сфера S^2; другой важный пример — тор. Грубо говоря, тор — это любая поверхность, гомеоморфная поверхности бублика или массивного кольца.

Рассмотрим теорему, в которой говорится, что любая компактная поверхность гомеоморфна либо сфере, либо связной сумме торов, либо связной сумме проективных плоскостей. В качестве подготовки доказательства опишем так называемую «каноническую форму» для связной суммы торов или проективных плоскостей.

В каждом из рассмотренных случаев начинали двигаться от нижней вершины диаграммы и обходили границу против часовой стрелки. Ясно, что такое обозначение указывает отождествление однозначно; с другой стороны, написав символ, соответствующий данной диаграмме, можно начать движение из любой вершины и двигаться вдоль границы как по, так и против часовой стрелки.

Подведем итог, выписав символы, соответствующие каждой из поверхностей в теореме:

1) Сфера: aa^{-1}

2) Связная сума n торов: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$.

3) Связная сумма n проективных плоскостей: $a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n$.

Для того чтобы доказать теорему 3.1, надо предположить, что данная поверхность триангулируема, т. е. разбивается на треугольники, правильно примыкающие друг к другу.

Триангуляция компактной поверхности S состоит из конечного семейства замкнутых подмножеств $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, покрывающего S, и семейства гомеоморфизмов $\varphi_i: T_i' \to T_i$, $i = 1,2,..,n$, где каждое множество T_i' есть треугольник в плоскости R^2. Подмножества называются «треугольниками». Подмножества треугольников T_i, являющиеся образами вершин и ребер треугольников T_i' при отображении φ_i, также называются «вершинами» и «ребрами» соответственно. Наконец, требуется, чтобы любые два различных треугольника T_i и T_j либо не имели ни одной общей точки, либо имели единственную общую вершину, либо пересекались по одному ребру.

Триангулированную поверхность можно рассматривать как поверхность, построенную склеиванием по определенному правилу различных треугольников: это напоминает составление разрезной картинки-загадки. Так как два различных треугольника не могут иметь одних и тех же вершин, можно полностью определить триангуляцию поверхности, перечисляя вершины, а затем составляя список троек вершин, являющихся вершинами треугольников. Такой список треугольников с точностью до гомеоморфизма полностью определяет поверхность с данной триангуляцией.

Введем новые обозначения для известных геометрических фигур в евклидовой плоскости:

евклидов 0-симплекс — точка,

евклидов 1-симплекс — замкнутый прямолинейный отрезок,

евклидов 2-симплекс — замкнутый треугольник.

Под n-симплексом s^n. $n = 0,1,2$, на многообразии M понимается евклидов n-симплекс e^n вместе с взаимно однозначным и непрерывным в обе стороны отображением φ симплекса e^n в M. Говорят, что n-симплекс, $n = 0,1,2$, на многообразии M ориентирован, если для его $n + 1$ вершин установлен определенный порядок. Два порядка вершин определяют одну и ту же ориентацию в s^n, если один порядок может быть получен из другого четной подстановкой множества его вершин.

Два порядка вершин определяютодну и ту же ориентацию в s^n, если один порядок может быть получен из другого четной подстановкой множества его вершин. Если $n \geq 0$, то симплекс s^n имеет две возможные ориентации: обозначим симплекс с одной ориентацией через s^n, тогда симплекс с противоположной ориентацией следует обозначитьчерез $-s^n$.

1-симплекс с вершинами P_0 и P_1 имеет две ориентации $\langle P_0, P_1\rangle$ и $\langle P_1, P_0\rangle$, где мы используем скобки для обозначения симплекса, вершины которого имеют порядок, указанный в скобках. 2-симплекс с вершинами P_0, P_1, P_2 имеет две ориентации

$$\langle P_0, P_1, P_2\rangle = \langle P_1, P_2, P_0\rangle = \langle P_2, P_0, P_1\rangle$$

и

$$\langle P_2, P_1, P_0\rangle = \langle P_1, P_0, P_2\rangle = \langle P_0, P_2, P_1\rangle.$$

Для удобства мы будем также говорить, что 0-симплекс с одной вершиной P_0 имеет две ориентации, обозначаемые $\langle P_0\rangle$ и $-\langle P_1\rangle$.

В четвертой главе рассматриваем нормальные формы компактных ориентированных поверхностей. Имея дело с топологией поверхностей, удобнее наглядно представлять себе модель, гомеоморфную рассматриваемой поверхности, чем мыслить ее абстрактно. Такие модели способствуют интуитивному пониманию решаемых проблем и помогают более полно осмыслить найденные результаты. Для компактных поверхностей такие модели легко указать. Эти модели называются нормальными формами и обладают тем свойством, что каждая компактная ориентируемая поверхность гомеоморфна одной и только одной нормальной форме.

Сперва необходимо "развернуть" данную компактную ориентируемую поверхность S. Фиксируем триангуляцию Δ на S с когерентной ориентацией и

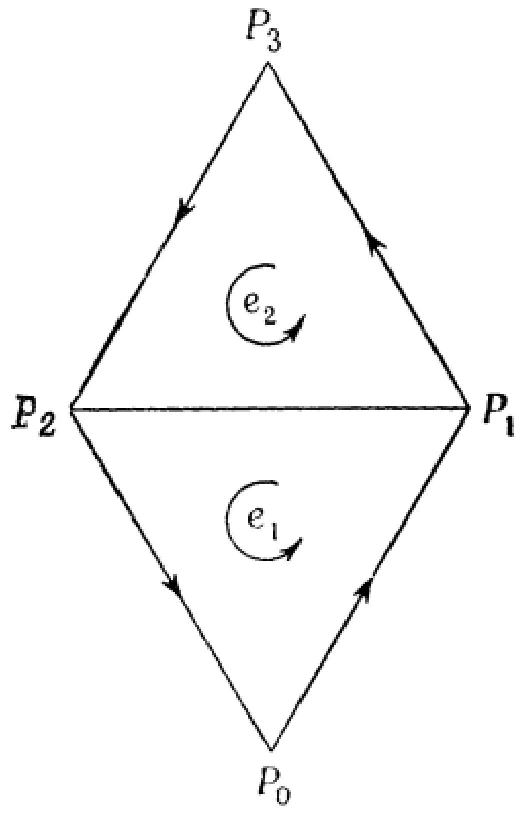

Рисунок 1.1

нормальными барицентрическими координатами. В силу компактности S эта триангуляция содержит только конечное число треугольников. Отобразим один из этих треугольников, скажем s_1^2 барицентрически на евклидов треугольник e_1^2. Возьмем затем прилегающий к s_1^2 треугольник s_2^2 и отобразим его барицентрически на евклидов треугольник e_2^2, прилегающий к e_1^2 вдоль соответствующей стороны. Когерентная ориентация s_1^2 и s_2^2 индуцирует ориентацию границы многоугольника $|s_1^2| \cup |s_2^2|$, а следовательно, и границы многоугольника $e_1^2 \cup e_2^2$ (рис. 1.1).

Многоугольник $e_1^2 \cup e_2^2$ можно топологически отобразить на квадрат так, что стороны перейдут в стороны, и вместо $e_1^2 \cup e_2^2$ будем рассматривать теперь этот квадрат. Выберем затем треугольник s_3^2 имеющий общую сторону либо с s_1^2, либо с s_2^2, и отобразим его барицентрически на евклидов треугольник e_3^2, прилегающий к соответствующей стороне e_1^2 или e_2^2 и не налегающий ни на e_1^2, ни на e_2^2. Когерентная ориентация этих трех треугольников снова определит ориентацию границы многоугольника $e_1^2 \cup e_2^2 \cup e_3^2$. Этот многоугольник можно топологически отобразить на правильный пятиугольник так что стороны перейдут в стороны и этот многоугольник будем рассматривать как $e_1^2 \cup e_2^2 \cup e_3^2$.

Нормальной формой компактной ориентируемой поверхности является многоугольник, имеющий символ

a) aa^{-1} или

b) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$.

В случае a) мы говорим, что нормальная форма имеет род нуль, а в случае b) — что нормальная форма имеет род g.

Теперь получены нормальные формы компактных ориентируемых поверхностей в виде многоугольников определенного вида с парами отождествляемых сторон. Топологической деформацией нормальная форма может быть преобразована в выпуклый правильный многоугольник. Как будут выглядеть эти нормальные формы, когда в действительности склеим отождествляемые стороны? Начнем с нормальной формы рода нуль. Склеивая стороны a и a^{-1} получим поверхность, топологически эквивалентную сфере.

Нормальная форма рода 1 является четырехугольником $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ гомеоморфным прямоугольнику. Склеив отождествляемые стороны a и a^{-1}, мы получим цилиндр, у которого два конца b и b_1^{-1} отождествляются. Далее, склеивая концы b и b_1^{-1}, будем иметь тор в качестве модели нормальной формы рода 1.

Топологически можно прийти к тору и другим путем. Отрезав диск от тора, как показано на рис. 4.5, мы получим ручку. Отверстие, образовавшееся в результате удаления диска, ограничено кривой h, причем можно сделать так, чтобы h проходила через точку на поверхности, соответствующую вершине P на многоугольнике П. Если мы теперь раздвинем концы кривой h в точке P. то наш прямоугольник с вырезом превратится в пятиугольник с символом $aba^{-1}b^{-1}h$; этот символ является символом ручки. Удаляемая часть тора может быть деформирована в сферу, из которой выброшен сферический сегмент, ограниченный кривой h. Таким образом, мы можем представлять себе тор как сферу, к которой прикреплена ручка. Это приводит нас к нормальным формам более высокого рода. Пусть из сферы вырезано g дисков, ограниченных кривыми $h_1, h_2, \dots, h_g$, имеющими только одну общую точку P. Развертывая полученную поверхность, мы придем к g-стороннему многоугольнику с символом $h_1 h_2 \dots h_g$. Если прикрепить к каждой кривой h_k ручку $a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} h_k$, то, склеивая кривые h_k, мы получим нормальную форму рода g.

Нормальная форма рода g топологически эквивалентина сфере с g ручками. Было установлено, что каждая ориентируемая компактная поверхность гомеоморфна нормальной форме рода g и, следовательно, сфере с g ручками. Род g полностью определяет нормальную форму, так что две триангулируемые поверхности гомеоморфны, если их нормальные формы имеют одинаковый род. С другой стороны, для нахождения нормальной формы мы исходили из определенной триангуляции поверхности. Получили бы мы нормальную форму того же самого рода, взяв другую триангуляцию той же поверхности? Другими словами, можно ли нормальную форму рода g гомеоморфно отобразить на нормальную форму другого рода? Ответ на этот вопрос опирается на тот факт, что род нормальной формы зависит только от поверхности, а не от используемой триангуляции, так что гомеоморфные нормальные формы имеют одинаковый род. Это позволяет нам определить род компактной ориентируемой поверхности как род гомеоморфной ей нормальной формы.

Заключение. В ходе работы были рассмотрены понятия ориентированной и ориентируемой поверхности, даны определения и свойства триангуляции компактной поверхности. Исследованы нормальные образы триангулированных поверхностей. А также разобраны гомеоморфные образы компактных ориентированных поверхностей.

Итогом проделанной работы стала программа на языке Python, визуализирующая триангуляцию точек на плоскости, а также построение графика тора, который является моделью нормальной формы рода 1.

Триангуляция является универсальной структурой для решения различных задач вычислительной геометрии и машинной графики. Применение триангуляции не только позволяет упростить решение таких задач, но и в некоторых случаях может значительно улучшить трудоемкость.