МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРАХОВОГО ВЗНОСА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Мингачева Александра Николаевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н, доцент ______________ В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2023

Введение

В данной работе рассматриваются вопросы оценки величины страхового взноса посредством оптимизации параметров страховой системы в контексте теории полезности.

Актуальность

Страхование играет важную роль в экономической деятельности. Исследованию задач определения параметров страховых систем в различных постановках посвящено множество публикаций. В частности, в работе А. Ю. Голубина изучена задача оптимального выбора страховщиком дележа риска между ним и перестраховщиком в динамической модели страхования, найдены уравнения для определения значений параметров в оптимальных стратегиях перестрахования. Оптимизация параметров страховой деятельности является трудной задачей математического моделирования.

Целью данной работы является численное решение задачи определения взаимоприемлемых взносов и II типа оптимизационной задачи, а так же решение задач определения параметров страховых систем.

Структура бакалаврской работы

Работа состоит введения, трёх разделов, заключения и приложения.

— В первом разделе даны основные понятия теории рисков и методы моделирования случайных величин, изложены основные характеристики суммарных рисков, описаны основы теории полезности, её аксиоматика, методы экспериментального построения функций полезности, рассмотрены основные типы функций полезности, применяемых в страховании.

— Во втором разделе рассмотрена задача выбора страховых взносов в рамках теории полезности, а так же практические методы их расчётов, описаны типовые распределения страховых вносов, дана постановка основных оптимизационных задач.

— В третьем разделе построены решения задач определения параметров страховых систем и рассмотрены численные решения задачи определения взаимоприемлемых взносов и II типа оптимизационной задачи на языке программирования *Python*.

— В приложении представлен исходный код программы.

Основное содержание работы

Риском называется совокупность вероятностей возможного ущерба и его величин в некоторой стохастической ситуации.

Рисковый процесс – процесс изменения капитала страховой компании. Для удобства часто рассматривают такие модели изменения капитала, в которых моменты поступления выплат детерминированы, но величины страховых выплат являются случайными. Суть статической модели страхования состоит в том, что все договора имеют одинаковый срок действия, портфель полисов, проданных клиентам, считается сформированным единовременно, новые клиенты не появятся в течение всего периода страхования, а также каждый полис считается оплаченным в начале периода.

Суммарный ущерб – $X = X_1 + \ldots + X_n$, где n - численность группы клиентов, X_i $(i = 1, \ldots, n)$ – неотрицательные независимые случайные величины рисков отдельных клиентов.

Рисковая ситуация – тройка $(S, D, F(x))$, где $F(x)$ – распределение суммарного риска, S – объем собственных средств, D – суммарный взнос.

Страховщик не может выбирать все компоненты рисковой ситуации $(S, D, F(x))$ произвольно. Но он может изменять их в некоторых пределах. Будем считать, что рисковая ситуация зависит от параметра a, который доступен управлению страховщика. Причём $a \in A$, где A – некоторая заданная область. Выбор некоторого значения этого параметра определяет рисковую ситуацию $(S_a, D_a, F_a(x))$.

Часто *вероятность неразорения* $P\{S + D \geq X\}$ не имеет аналитического выражения, в силу сложности нахождения распределения суммарных рисков. А также при аппроксимации суммарных рисков возникает необходимая погрешность. Потому оценка надёжности компании проводится при помощи метода Монте-Карло. Применение этого метода подразумевает моделирование случайных величин с заданными законами.

Метод обратной функции. Допустим, что функция распределения $F(x)$ непрерывна и строго возрастает. Тогда на интервале $(0, 1)$ существует непрерывная и монотонная обратная функция $F^{-1}(y)$ и справедливо

Утверждение 1. Если случайная величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

Метод Неймана (метод исключения).

Предположим, что случайная величина ξ распределена на отрезке $[a, b]$, причем её плотность ограничена: $\max\limits_{x\in[a,b]} p_\xi(x) = C < \infty$. С.в. η_1,η_2,$\ldots$ — независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. $X_i \overset{\text{def}}{=} a + (b - a)\eta_{2i-1}$, $Y_i \overset{\text{def}}{=} C\eta_{2i}, (i = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, пары (X_i, Y_i) независимы и равномерно распределены в прямоугольнике $[a, b] \times [0, C]$. Обозначим через ν номер первой точки с координатами (X_i, Y_i), попавшей под график плотности $p_\xi(x)$, т. е. $\nu = \min\{i : Y_i \le p_\xi(x))\}$. Положим $X_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_{\nu=n}$.

Утверждение 2. При выполнении приведенных выше условий случайная величина X_ν распределена так же, как ξ.

Предположим, что неизвестная *функция полезности* $u(y)$ непрерывна и не убывает на отрезке $B = [a, b]$. Поскольку функция полезности $ku(y)+C$ эквивалентна исходной, то подходящим выбором констант $k > 0$ и C всегда можно добиться, чтобы ее множество значений стало отрезком $[0, 1]$. Не меняя обозначений, будем считать $u(a) = 0$, $u(b) = 1$. Процедура экспериментального построения функции полезности состоит в следующем: ИПР(принимающий решения индивидуум) оценивает для себя денежные эквиваленты y_i нескольких простых выигрышей Y_i, называемых лотереями, каждая из которых имеет два возможных значения z_i^1, z_i^2 с заданными вероятностями α_i, $1 - \alpha_i$, причем z_i^1, z_i^2 выбираются среди уже полученных эквивалентов $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Узнав от ИПР значение эквивалента $y_i \in [a, b]$, т.е. детерминированной суммы, получение которой для него эквивалентно участию в лотерее Y_i, мы можем приравнять полезность $u(y_i)$ к ожидаемой полезности $Eu(Y_i) = \alpha_i u(z_i^1)+(1-\alpha_i)u(z_i^2)$ и, таким образом, получить точку $(y_i, Eu(Y_i))$ графика функции $u(y)$. Продолжая, будем иметь табулировку функции $u(y)$ в наборе точек $\{y_i\}$ отрезка $[a, b]$.

Следующий этап заключается в построении $u(y)$ на всем множестве B возможных значений выигрышей, и принципиальный момент здесь состоит в выборе подходящего достаточно узкого класса функций полезности, предпочтительно заданного параметрически, в котором ищется $u(y)$. Такой класс определяется:

— во-первых, на основе качественной информации о склонностях ИПР;

— во-вторых, на основе имеющегося в теории полезности достаточно обширного арсенала «стандартных» функций полезности с известными свойствами.

Сформулируем несколько рекомендаций применительно к выбору функции полезности, когда ИПР является страховая компания. В этом случае в качестве выигрыша Y естественно рассматривать остаточный капитал $S+D-X$ к концу страхового периода:

— на всем множестве B возможных доходов $u(y)$ должна быть вогнутой возрастающей функцией;

— в области отрицательных доходов $y < 0$ $u(y)$ быстро убывает с увеличением $|y|$;

— в области больших положительных значений y темп роста $u(y)$ существенно падает;

— *неприятие риска* $r(x)$ не возрастает с ростом x, если специально не оговорено свойство особой, возрастающей осторожности при увеличении размера денежного фонда компании.

Формулируется *оптимизационная задача II типа*:

$$J(a) = Eu(S_a + D_a - X_a) \to max, a \in A,$$

где функционал J имеет смысл средней полезности остаточного капитала страховой компании, множество A задано внешними ограничениями на возможные решения a, полезность $u(y)$ быстро убывает при $y \to -\infty$. Возможные превышения риска X над $S + D$ штрафуются, а решение a^* оказывается приемлемым и для страховщика и для рынка в целом.

Если, компания считается равноправной группе клиентов в целом, формулируется *задача определения взаимоприемлемых взносов* d:

$$1/2Eu_0(S_0 + nd - X) + 1/2 \sum_{i=1}^{n} u_1(S_1 - d) \to max, d \in [D^*/n, d^*],$$

где S_0, u_0 и S_1, u_1 – начальный капитал и функция полезности страховщика и клиента соответственно, $Eu_0(S_0 + nd - X)$ – ожидаемая полезность остаточного капитала страховщика, $u_1(S_1 - d)$ – полезность остаточного капитала клиента, D^*/n – максимальная цена которую готов заплатить клиент, d^* – минимальная цена на которую согласен страховщик.

Решены задачи определения параметров страховых систем. А именно: задача определения взаимоприемлемой величины взноса и задача поиска величины страхового взноса, обеспечивающего заданную вероятность разорения

Для решения поставленных оптимизационных задач были использованы следующие библиотеки *Python*:

1. *Scipy* – пакет прикладных математических процедур для выполнения научных и технических вычислений.
2. *Pandas* – высокоуровневая библиотека для манипулирования данными и для анализа данных.
3. *Plotly* и *Matplotlib* – библиотеки для визуализации данных.

Решение задачи поиска взаимоприемлемых взносов

Определяются значения гиперпараметров.

Рассматривается однородная группа из 10 клиентов. Клиенты заключают договор 2-летнего страхования на дожитие. В момент заключения договоров возраст всех клиентов составляет $K = 75$ лет. Предполагается, что время жизни клиентов распределено по закону Гомпертца с параметрами $A = 0.539944352319166$ и $B = 2.0499601967370884 \cdot 10^{-19}$.

Начальный капитал компании $S_0 = 1$. Капитал каждого клиента $S_1 = 1$. Функция полезности компании является квадратичной $u_0(y) = -1/320y^2 + y$. Функция полезности клиентов совпадают, являются логарифмическими и представляют собой $u_1(y) = 20\ln(1 + y/20)$.

Таким образом, выплаты $X_i = \rho * \delta^{T(K)}$ если $T(K) < 2$, и $X_i = 0$ в противном случае (ρ — «начальная выплата», $\rho = 0.5$, δ – «процентная ставка» $\delta = 1.75$, $T(K)$ – остаточное время жизни).

Компания считается равноправной группе клиентов в целом. Необходимо определить возможность страхования в данном случае, и, если страхование возможно, найти взаимоприемлемую величину взносов.

Для определения закона распределения суммарных выплат X используется нормальная аппроксимация. Её параметры оцениваются по методу моментов в соответствии с рисунком 1.

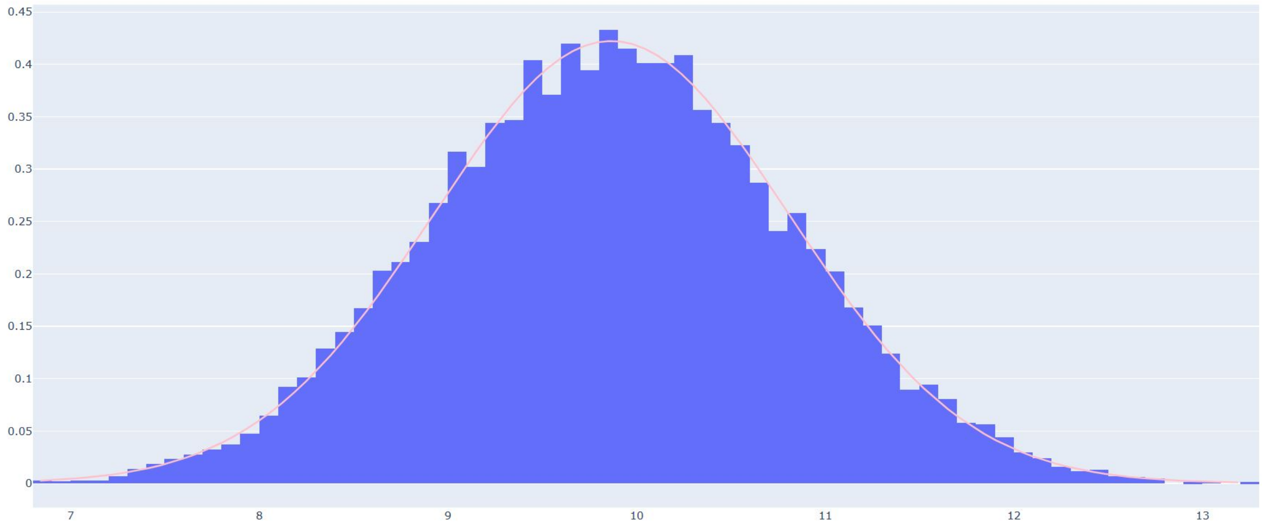

Рисунок 1 – Аппроксимация суммарного риска нормальным распределением

В соответствии с рисунком 2, вычисленное оптимальное значение $d = 0.99754435$.

Проверяется величина вероятности разорения компании, в предположении, что действующая цена полиса равна 0.99754435.

В итоге: *Вероятность разорения* 0.095

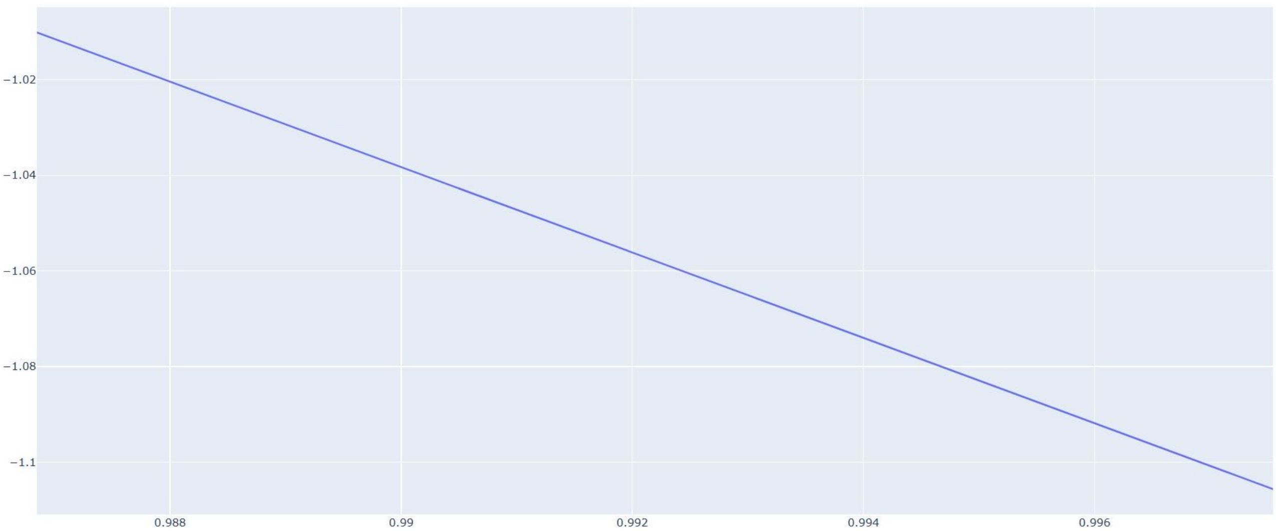

Рисунок 2 – Минимизируемый функционал на области допустимых взносов

Решение II типа оптимизационной задачи

Определяются гиперпараметры программы.

Пусть α – *показатель нагрузки* ($\alpha > 1$, $\alpha \in [1.2, 2.5]$), а численность однородной группы клиентов задаётся формулой:

$$n(\alpha) = \lfloor 1000 * \alpha^{-2.5} \rfloor$$

Вероятность наступления страхового случая в группе $p = 0.1$ и не зависит от α.

Риски X_i имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами $a = -3$, $b = 1$. Риски X_i одинаково и независимо распределены. X_i^0 — случайная величина, с вероятностью p равная X_i, и с вероятностью $1 - p$ равная 0. $X(\alpha) = \sum_{i=1}^{n(\alpha)} X_i^0$ — сумма выплат.

Функция полезности компании $u_0(y) = 1 - \exp(-x)$. Её начальный капитал $S = 0.1$. Суммарный взнос клиентов равен $D = \alpha EX$.

Необходимо определить оптимальное значение показателя нагрузки α, как решение оптимизационной задачи второго типа.

Суммарные выплаты аппроксимируются нормальным и гамма распределениями при начальном $\alpha = 1.2$. Для этого моделируется выборка из распределения суммарных рисков, и параметры аппроксимируемых распределений оцениваются выборочно. В соответствии с рисунком 3 предполагается, что гамма аппроксимация (красная линия) приближает суммарные выплаты лучше, чем нормальная (розовая линия).

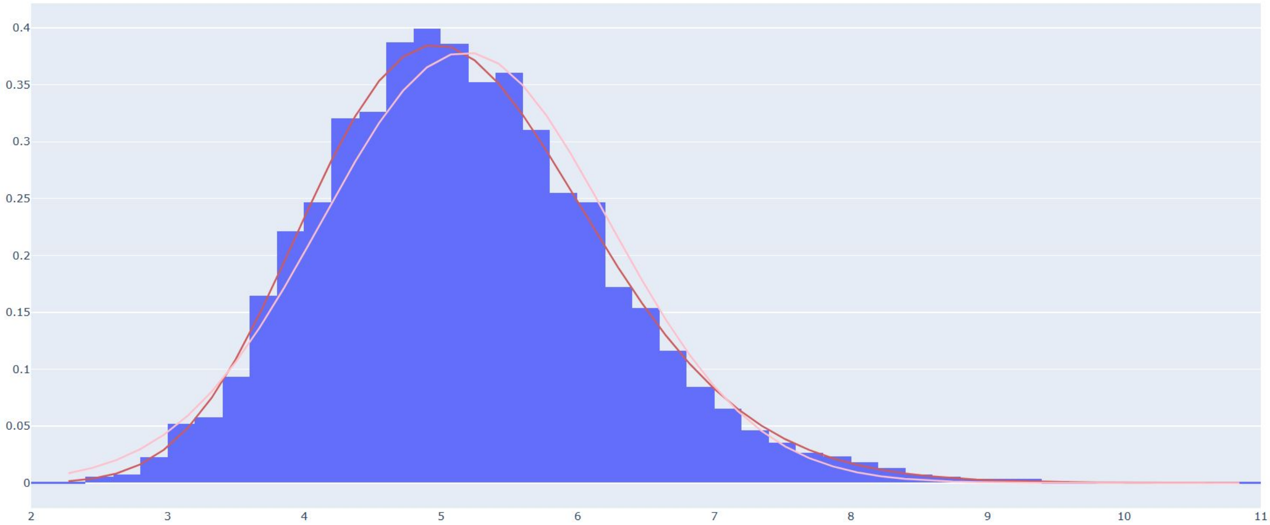

Рисунок 3 – Нормальная и гамма аппроксимации суммарных вносов

Принадлежность выборки к гамма распределению исследуется при помощи критерия Крамера-Фон Мизеса(ω^2-критерий). Получим:

CramerVonMisesResult(statistic=0.3623864531845712, pvalue=0.09102249129576101)

Так как *pvalue* больше уровня значимости 0.05, гипотеза о том, что выборка принадлежит гамма распределению, не может быть отвергнута.

В соответствии с рисунком 4 оптимальным является значение $\alpha = 1.98118984$. Моделируемая вероятность разорения равна 0.011. Данная вероятность разорения мала, несмотря на то, что явно ограничения на неё не налагались. Потому $\alpha = 1.98118984$ действительно можно считать оптимальным.

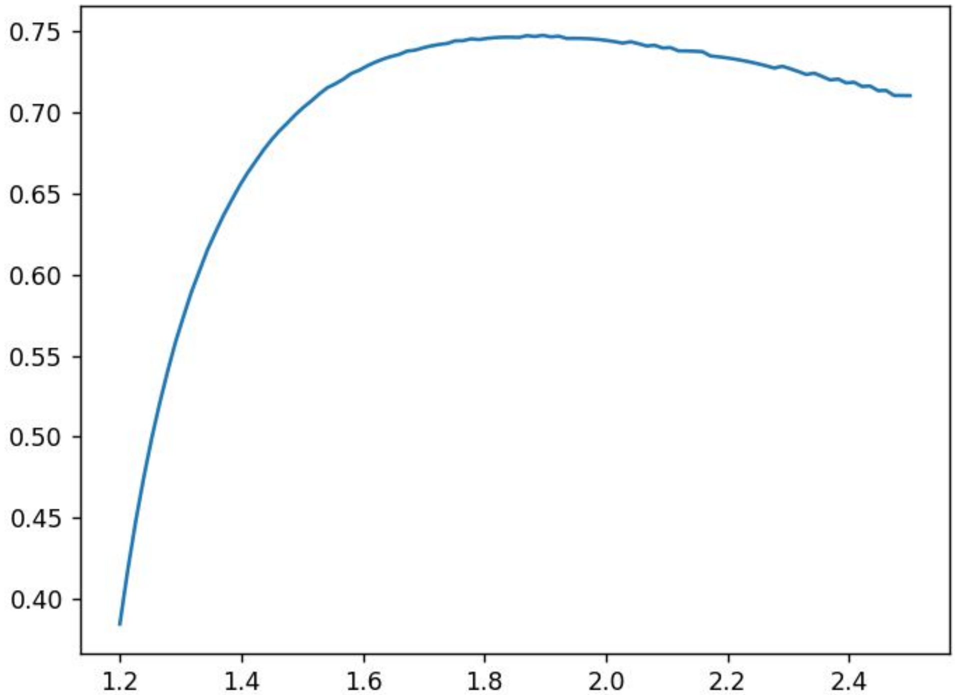

Рисунок 4 – Вид минимизируемого функционала II типа оптимизационной задачи

Заключение

В данной работе был проведён анализ проблемы определения размеров страховых взносов. Рассмотрены принципы численного моделирования вероятности разорения. Решены задачи определения параметров страховых систем. Продемонстрирован метод проверки допустимости аппроксимации суммарных рисков. Изучены задачи выбора оптимальной страховой системы, а также получены численные решения задачи определения взаимоприемлемых взносов и II типа оптимизационной задачи при помощи *Python*.

Изложена аксиоматика теории полезности, принципы выбора функциональных классов полезности на основе функции неприятия риска. Даны рекомендации, которым должна удовлетворять функция полезности для страхователя. Показана необходимость стандартизации функций полезности. Доказаны методы моделирования случайных величин. Рассмотрены условия возможности страхования. Изложены некоторые типовые распределения страховых выплат. Обоснованна необходимость аппроксимации суммарных рисков. Приведены классические практические методы определения страховых взносов.

Естественным развитием данной работы является оптимизация параметров динамических моделей страхования с учётом возможности перестрахования, применения франшиз.