МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ХААРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К АНАЛИЗУ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Лопатиной Арины Сергеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ____________ П. А. Терехин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что определяет ее актуальность.

Основная проблема в задаче поиска приближенного дифференциального уравнения заключается в большом количестве методов нахождения численного решения однородных дифференциальных уравнений (ОДУ), например, такие как метод Эйлера или Метод Рунге-Кутты.

Выбор метода, как правило, осуществляется эмпирическим путем на основе некоторого заданного параметра. Выбор того или иного параметра отражает специфику решения задачи.

Существует множество методов нахождения численного решения ОДУ. Существующие модели широко используются в различных отраслях науки и техники. Так, например, в биологии применяется модель Лотки-Вольтерры, которая помогает описать популяцию, так же дифференциальные уравнения нашли применение в физике и химии, в экономике используются в моделях экономической динамики. В данных моделях отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Данная работа посвящена нахождению численного решения задачи Коши для обыкноченного дифференциального уравнения 1-го порядка порядка на отрезке [0,1] с использованием разложения функций в ряд по системе Хаара и применение ее к анализу динамических моделей экономики. Ранее с помощью системы Хаара строилось само решение дифференциального уравненияю. В этом случаи приходилось вводить специальный оператор дифференцирования для кусочно-постоянных функций, что приводило к громоздким вычислениям.

Актуальность работы. Задача поиска приближенного решения дифференциальных уравнений и прогнозирование на основе имеющихся значений и применение их к анализу динамический моделей экономики является основной для планирования и оптимизации объемов производства. Хороший прогноз на несколько шагов вперед может дать бизнесу серьезные конкурентные преимущества.

Целью бакалаврской работы является исследование основных методов поиска решения задачи Коши и построение модели, с помощью которой можно будет сделать наиболее точный расчет.

Для достижения данной цели можно выделить ряд **задач**:

- рассмотреть понятия дифференециальных уранений;

- изучить понятия системы Хараа;

- изучить методы нахождения приближенного решения ОДУ;

- сформулировать алгорим находения приближенного решения ОДУ с использованием функции Хараа;

- применить теоритические знания на практике и продемонстрировать работу;

- проанализировать полученные результаты.

Структура бакалаврской работы. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы, содержащего 20 наименований и одного приложения. В первом разделе приводится определение классической ортонормированной системы Хаара и описание ее основных свойств. Во втором разделе подробно описываются линамические модели экономики, их появление, статистика. В третьем разделе приведены постановка задачи, результаты работы алгоритма и сравнительный анализ.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе приводится определение дифференциального уравнения, классической ортонормированной системы - система Хаара, описание ее основных свойств и вспомогательные теоремы и леммы.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если в нём функция и все её производные содержатся только в первой степени, отсутствуют и их произведения. Линейное дифференциальное уравнения первого порядка имеет вид:

$$y' + a(x)y = f(x)$$

Системой нормированных функций Хаара называется следующая совокупность функций:

$$Haar_{0,0}(t) \equiv 1$$

$$Haar_k(t) = \chi_k(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \text{при } t \in [\frac{k}{2^m}; \frac{k+1/2}{2^m}) \\ -\sqrt{2^m} & \text{при } t \in [\frac{k+1/2}{2^m}; \frac{k+1}{2^m}] \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Система функций Хаара имеет следующие свойства:

1) Система Хаара $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{\infty} = \{\chi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована на [0,1];

2) Линейная оболочка набора $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{2^n-1}$ совпадает с классом A_n двоично-ступенчатых функций;

3) Система Хаара полна в $L[0,1]$

В работе так же сформулированы и доказаны вспомогательные леммы и теоремы для оценки погрешности:

Лемма 1. *Если набор неотрицательных чисел* $\{f_k\}_{k=0}^{N}$*удовлетворяет с некоторыми постоянными* $\alpha, \beta > 0$ *условию*

$$f_k \leq \alpha + \beta \sum_{j=0}^{k-1} f_j, \qquad k = 0, ..., N,$$

то выполняется неравеноство

$$f_k \leq \alpha e^{\beta k} \qquad k = 0, ..., N.$$

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$T_n \le C_n e^{A_n} \le C e^{\|a\|}, \qquad n = 1, 2, ...$$

Лемма 3. *Имеет место оценка*

$$\Delta_n \le \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \le \frac{2C\|a\|e^{\|a\|}}{2^n}, \qquad n \ge \log_2 \|a\| + 1$$

Теорема 1.

Для любого n=1,2,... выполняется неравенство

$$\|y' - z_n'\| \le e^{\|a\|}(\Upsilon_n + Ce^{\|a\|}\Upsilon_n^*) \tag{1}$$

Во втором разделе подробно описываются история возникновения кейнсианского учения, определение динамической модели экономики.

Динамическая модель Кейнса исследует валовой внутренний продукт (ВВП) как эндогенную переменную, изменяющуюся со временем. Предполагая, что спрос в следующем году сформируется в текущем году, тогда предприниматели будут правильно планировать производство на следующий год с прогнозируемым спросом.

Эта модель применима только для анализа и в краткосрочной перспективе прогнозирование поведения экономики. Не подходит в долгосрочной перспективе отчасти потому, что оценка не отражает воспроизводимый процесс, отчасти потому, что он не учитывает выбытие средств в связи с их моральным и физическим износом

Единственной эндогенной в рассматриваемой модели Кейнса переменной (зависящей от времени) является Y ВВП - объем производства товаров конечного пользования. ВВП содержит:

— Фонд непроизводственного потребления C;

— валовые частные внутренние инвестиции I (сумма всех закупок вновь произведенных средств производства и изменения в акциях предпринимателей);

— расходы государства на приобретение товаров и услуг E;

— чистый экспорт G.

Все эти величины рассматриваются как функции времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t). \end{cases}$$

Средняя склонность к потреблению a (APC) выражает желание приобретать товары. Она отражается отношением потребительскими расходми ко всей величине дохода.

Предельная склонность к потреблению (MPC) – это доля прироста дохода, на величину которой увеличивается потребление.

$b(t)$– это автономное потребление, когда доход слишком мал, чтобы соответствовать необходимому минимуму потребления.

Для определения эффекта акселерации используется мера воздействия изменения потребительского спроса на инвестиционный спрос – *коэффициент акселерации* $k(t)$ (или акселератор).

В кейнсианской концепции: величина дохода выступает в качестве экзогенного параметра; объем потребления зависит только от текущего располагаемого дохода; распределение дохода на потребление и сбережения зависит не от объективного параметра экономической конъюнктуры (текущей ставки процента), а от предпочтений потребителя: традиций, сложившегося мировоззрения, общественных установок и т.п., то есть от факторов субъективного характера.

На том основании, что выпуск, который планируется на следующий год, должен согласоваться с прогнозируемым спросом:

$$Y_{t+1} = \widetilde{C} + cY_t + I \tag{1}$$

где $\widetilde{C}$ нижний предел фонда внепроизводственного потребления, c – пограничная тенденция к потреблению, т. е. повышение объема потребления при возрастании прибыли на единицу (доля прироста дохода, идущая на товары потребления), $0 < c < 1$.

Соотношение (1) представляет собой динамическую модель Кейнса.

В третьем разделе приводится постановка задачи и рассматривается численное решение задачи Коши для обыкновенного уравнения на отрезке [0,1] с использованием разложения функций в ряд по системе Хаара.

Построение алгоритма для ОДУ.

Для рассмотрения необходимо ввести следующую задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0,1]$- непрерывные функции. Приближное решение $y_n(x)$ задачи (2) найдем, представляя его производной в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \tilde{y}_{n,k}\chi_k(x).$$

Данный полином является ступенчатой функцией:

$$y_n'(x) = y_{n,k}, \qquad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \qquad k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n},$$

во внутренних точках равная полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 - своему пределу внутри отрезка [0,1], т.е

$$y_n'(0) = y_{n,0},$$

$$y_n'(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2$$

при k=1,...,$2^n - 1$, $y_n'(1) = y_{n,2^n-1}$

Принимая во внимание представления функций $y_n'(x)$ и $y_n(x)$, а так же обозначив $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$, получим:

$$y_n + a_{n,k}(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}\sigma_{n,k}2^{-n}) = b_{n,k}, \qquad k = 0, ..., 2^n - 1. \tag{3}$$

Система (2) -это система линейных алгебраических уравнений величины $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Она определяется однозначно и рекуррентно.

Результаты численного эксперемента

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (1), где

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x+1} y = exp(x)(x+1) \quad \text{при } x \in [0;1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что точное решение данной задачи является $y(x) = (exp(x) - 1)(x+1)$.

В таблице 1 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 22 точек разбиения отрезка [0,1]. Т

Таблица 1

x	Y(x)	|Y(x) - H(x)|	|Y(x) - RK(x)|
0.045454	0.048617	0.00003	0.00003
0.090909	0.103821	0.00006	0.00007
0.136364	0.166021	0.00011	0.00011
0.181818	0.23565	0.00013	0.00017
0.227273	0.313166	0.00017	0.00019
0.272727	0.399053	0.00021	0.00023
0.318182	0.493825	0.00025	0.00027
0.363636	0.598024	0.00029	0.00031
0.409091	0.712223	0.00034	0.00037
0.454545	0.837029	0.00039	0.00039
0.5	0.973082	0.00044	0.00045
0.545455	1.12106	0.00047	0.00049
0.590909	1.28168	0.00051	0.00053
0.636364	1.64393	0.00060	0.00062
0.727273	1.8472	0.00063	0.00065
0.772727	2.06641	0.00068	0.00070
0.818182	2.3025	0.00072	0.00074
0.863636	2.55648	0.00075	0.00078
0.909091	2.8294	0.000679	0.00082
0.954545	3.12237	0.00083	0.00086

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответвтенно

$$R_H = 0.00083, \qquad R_{RK} = 0.000878.$$

Данный пример показывает, что в определенных случаях метод Хаара дает погрешность лучше, чем метод Рунге – Кутта.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + sin(x)y = (2x + 1 + sin(x)(x^2 + x)), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

В данной задачи точное решение имеет вид $y(x) = x^2 + x$.

В таблице 2 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка [0,1].

Таблица 2

x	Y(x)	|Y(x) - H(x)|	|Y(x) - RK(x)|
0.07813	0.08423	0.00030	0.01582
0.14063	0.16040	0.00043	0.01571
0.20313	0.24438	0.00065	0.01554
0.26563	0.33618	0.00097	0.01531
0.32813	0.43579	0.00141	0.01502
0.39063	0.54321	0.00196	0.01468
0.45313	0.65845	0.00265	0.01430
0.51563	0.78149	0.00346	0.01387
0.57813	0.91235	0.00440	0.01341
0.64063	1,05103	0.00548	0.01292
0.70313	1,19751	0.00668	0.01241
0.76563	1,35181	0.00800	0.01188
0.82813	1,51392	0.00944	0.01134
0.89063	1,68384	0.01098	0.01079
0.95313	1,86157	0.01263	0.01025

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответвтенно

$$R_H = 0.0134854117964, \qquad R_{RK} = 0.015869140625.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрен метод решения задачи Коши с использованием разложения функции в ряд по системе Хаара и его применение к анализу динамических моделей экономики. По результатам исследования написана программа и проведен численный эксперемент, который показал следующие: для задачи Коши ОДУ 1-го порядка погрешность метода практически идентична погрешности метода Рунге-Кутты второго порядка, но в некоторых случиях погрешность значительно меньше.

Хотелось бы отметить, что для изучения алгоритма использовались модельные задачи с известными точными решениями. Следовательно можно предположить, что для нахождения приближенного решения, данный алгоритм можно перенести на более сложные задачи, точное решение которых трудно или вовсе невозможно найти.