МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Вторцева Кирилла Дмитриевича

Научный руководитель
ст. преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение Системы массового обслуживания (СМО) - это математические модели, которые описывают процессы обслуживания клиентов в организациях, таких как банки, рестораны, больницы и т.д. Они включают в себя описание потока клиентов, их прибытия и времени обслуживания, а также характеристики обслуживающих каналов и системы в целом.

Одним из способов оптимизации работы таких систем является моделирование и анализ их работы.

В данной работе рассматривается система массового обслуживания в контексте потока требований, поступающих в нее.

Актуальность темы заключается в том, что системы массового обслуживания являются неотъемлемой частью различных сфер деятельности и оказывают значительное влияние на качество обслуживания клиентов, время ожидания и производительность системы в целом. Оптимизация работы таких систем позволяет повысить эффективность и экономичность их функционирования, улучшить качество обслуживания и уменьшить время ожидания для клиентов. Поэтому изучение и анализ работы систем массового обслуживания является актуальной задачей для науки и практики.

Целью работы является моделирование и оптимизация систем массового обслуживания с ожиданием.

Объектом исследования является система массового обслуживания с ожиданием.

Предмет исследования – поток требований поступающих в систему массового обслуживания.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие **поставленные задачи**:

1. изучить основные понятия, связанные с СМО;
2. построить модели СМО;
3. рассчитать основные характеристики СМО на основе имитационной модели и по теоретическим формулам;
4. провести сравнительный анализ полученных характеристик;
5. применить построенную имитационную модель для решения оптимиза-

ционных задач.

Исследование имеет **практическое значение**, так как позволяет создать компьютерную модель обслуживающих систем, на основе которой можно проводить исследования и рассчитывать характеристики для этих систем. Это позволяет оценить состоятельность и эффективность предприятий и сделать соответствующие выводы.

В первом разделе рассмотрены основные компоненты моделей массового обслуживания и описывается необходимая система обслуживания типа $M/M/k$.

Второй раздел посвящается принципам и особенностям построения имитационных моделей СМО.

В третьем рассмотрены основные понятия и возможности NumPy и pandas.

В четвертом разделе запрограммирована математическая модель СМО, на основании которой были рассчитаны основные характеристики системы. А также с помощью имитационной модели были рассмотрены оптимизационные задачи.

Основное содержание работы. Основные понятия теории массового обслуживания.

Система массового обслуживания (СМО) - производит обслуживание требований, поступающих в нее из источника требований и возвращающихся после завершения обслуживания обратно в источник. Обслуживание требований в системе производится приборами. В теории массового обслуживания особое место занимает экспоненциальное распределение.

Параметры и характеристики систем обслуживания. Системы обслуживания характеризуются пятью величинами:

— A - характеризует поток требований
— S - характеризует случайные последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах обслуживания
— k - число приборов в системе
— B - число мест для ожидания в очереди
— Z - указывает число источников требований.

Математическая модель системы M/M/k:

— $A = M$ (Markov) - пуассоновский поток требований с параметром λ.

— $S = M$ - последовательность независимых, одинаково распределенных экспоненциально с параметром μ длительностей обслуживания на каждом приборе

— $k > 0$

— $B = \infty$

— $Z = 1$

Обозначения:

— λ - интенсивность входящего потока требований;

— μ - интенсивность обслуживания требований одним прибором;

— k - число приборов в системе;

— ψ - коэффициент использования обслуживающих приборов системы;

— $\bar{n}$ - математическое ожидание (м. о.) числа требований в СМО;

— $\bar{b}$ - м. о. числа требований в очереди СМО;

— $\bar{g}/\bar{h}$ - м. о. числа свободных/занятых приборов в СМО;

— $\bar{u}/\bar{w}$ - м. о. длительности пребывания требований в СМО/очереди.

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{V} n p_n,$$

$$\bar{b} = \sum_{n=k+1}^{V} (n-k) p_n,$$

$$\bar{g} = \sum_{n=0}^{k} (k-n) p_n,$$

$$\bar{h} = \sum_{n=0}^{k} n p_n + k \sum_{n=0}^{V} p_n.$$

Формулы для вычислений характеристик системы $M/M/k$

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$\psi = \frac{\lambda}{k\mu},$$

p_n - стационарная вероятность пребывания в СМО точно n требований.

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!}, \quad n \leq k,$$
$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{\lambda}{k\mu} = p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{k! k^{n-k}}, \quad n \leq k.$$
$$p_0 = \left(\frac{(k\psi)^k}{k!(1-\psi)} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k\psi)^n}{n!} \right)^{-1},$$

$$p_n = \begin{cases} p_0 \frac{(k\psi)^n}{n!}, & 0 \leq n \leq k, \\ p_0 \frac{k^k \psi^n}{k!}, & n \geq k. \end{cases}$$

$$\overline{h} = \psi k,$$
$$\overline{b} = p_0 \frac{k^k \psi^{k+1}}{k!(1-\psi)^2},$$
$$\overline{u} = \frac{1}{\mu} (p_0 \frac{k^{k-1} \psi^k}{k!(1-\psi)^2} + 1),$$
$$\overline{g} = (1-\psi)k,$$
$$\overline{w} = \frac{p_0}{\mu} \frac{k^{k-1} \psi^k}{k!(1-\psi)^2}.$$

Имитационное моделирование СМО - это метод анализа и оптимизации процессов обслуживания, основанный на создании компьютерной модели, которая имитирует работу реальной системы. В этой модели учитываются все основные параметры, такие как число обслуживающих устройств, скорость обработки заявок, интенсивность поступления заявок и т.д. Имитационное моделирование позволяет проводить эксперименты с различными вариантами настройки системы и оценивать их эффективность без риска для реальной системы.

Система массового обслуживания состоит из одного обслуживающего прибора и очереди неограниченной длины. Из источника требований в очередь системы обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Постановка и выбор требований из очереди производятся прибором в соответствии с дисциплиной $FCFS$. Длительность обслуживания требований прибором является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Для выполнения условия существования стационарного режима полагаем $\lambda < \mu$. Необходимо построить имитационную модель системы S.

Система S состоит из следующих объектов:

1. источник требований;
2. очередь требований системы обслуживания;
3. прибор системы обслуживания;
4. требование.

Требования. В общем случае требования представляют собой перемещаемые по системе объекты, различающиеся классом, приоритетом, номером и другими параметрами. Из всего набора параметров требования реальной системы в модели необходимо отобразить только те, которые способствуют достижению цели моделирования.

В нашем случае понадобятся следующие атрибуты требования модели:

1. момент поступления требования t_n в очередь системы из источника;
2. момент начала обслуживания требования t_{start};
3. момент завершения обслуживания требования t_{end}.

Требование в компьютерной модели можно представить именованной областью памяти, содержащей форматированные поля данных (атрибуты требования).

1. разность моментов t_{end} и t_n определяет длительность пребывания требования в системе обслуживания;
2. разность моментов t_{start} и t_n определяет длительность ожидания требования в очереди системы обслуживания.

Для получения статистически значимых оценок характеристик $\bar{u}$ и $\bar{b}$ потребуется определенное число обслуженных требований. Организуем их хранение в модели следующим образом.

Прибор, завершив обслуживание требования, будет направлять его не в источник, а в специально организованную очередь обслуженных требований $Q_{\text{обс.}}$.

Очереди. Очереди являются самостоятельными объектами имитационных моделей систем обслуживания и служат для хранения требований, ожидающих обработки. Установление требований в очереди и выбор их из очередей производится программными процессами, поэтому каждая очередь считается принадлежащей конкретному процессу.

Основным набором характеристик очереди являются:

1. максимальное число требований в очереди;
2. дисциплина установления требований в очередь и выбора их из очереди;
3. приоритет требований, которым разрешается пребывать в очереди.

Управление работой имитационной модели обеспечивается ведущей программой, которая выполняет следующие функции:

1. определяет объекты имитационной модели (сегменты процессов, очереди требований, структуру требования);
2. формирует начальное состояние модели:
   а) начальный момент модельного времени равен нулю,
   б) прибор переводится в состояние «свободен»,
   в) момент активизации сегмента π_n равен нулю,
   г) момент активизации сегмента π_{start} равен ∞,
   д) момент активизации сегмента π_{end} равен ∞,
   е) число требований в очереди Q (как правило, устанавливается в положение («пусто»),
   ж) определяет функцию распределения длительности интервала времени между очередными поступлениями требований в СМО,
   з) определяет интенсивность потока требований λ,
   и) определяет функцию распределения длительности обслуживания требований прибором,
   к) определяет интенсивность обслуживания требований μ,
   л) определяет условие завершения выполнения имитационной модели);
3. в текущий момент модельного времени θ в установленной последовательности выполняет все сегменты процессов (сегменты программных процессов), моменты активизации которых совпадают с θ. Результатом выполнения любого сегмента процесса, в частности, является момент

его следующего выполнения или изменение моментов выполнения других сегментов процессов. Ведущая программа запоминает эти моменты и соответствующие им типы сегментов процессов;

4. обеспечивает продвижение модельного времени посредством установления текущего момента θ равным ближайшему моменту выполнения сегмента процесса;
5. определяет момент завершения выполнения имитационной модели. Как правило, условием завершения выполнения имитационной модели является достижение заданного числа обслуженных требований либо превышение явно указанного момента модельного времени;
6. обеспечивает обработку статистических данных;
7. выводит полученные результаты в требуемом формате в файл или экран монитора.

Вычислительный эксперимент. Целью вычислительного эксперимента является:

— программирование СМО алгоритмом имитационного моделирования, а также вычисление и сравневание характеристик системы с теоретическими значениями;

— решение оптимизационных задач СМО на построенной модели.

Требуется определить следующие характеристики работы системы:

— $\bar{b}$ - среднее число требований в очереди;

— $\bar{g}$ - среднее число свободных приборов;

— $\bar{h}$ - среднее число занятых приборов;

— $\bar{u}$ - средняя длительность пребывания требований в системе;

— $\bar{w}$ - средняя длительность пребывания требований в очереди (временя ожидания).

Построение системы.

Входными данными программы являются следующие:

— интенсивность входящего потока требований (число требований за единицу времени);

— интенсивность обслуживания требований;

— общее число требований;

— общее число обслуживающих приборов.

Выходными данными программы являются следующие статистические характеристики:

— $\widetilde{b}$ - среднее число требований в очереди;

— $\widetilde{h}$ - среднее число занятых приборов;

— $\widetilde{g}$ - среднее число свободных приборов;

— $\widetilde{u}$ - средняя длительность пребывания требований в системе;

— $\widetilde{w}$ - средняя длительность пребывания требований в очереди.

Проверка работоспособности системы.

Входные параметры:

— $\lambda = 2$;

— $\mu = 4$;

— $k = 3$;

— $n = 10^2, 10^4$.

Таблица 1 – Вычисление практических характеристик системы

Характеристики	вычисление на основании дискретной модели		вычисление на основании теоретических формул
	10^2	10^4	
среднее число требований в очереди	$\widetilde{b} = 0.00095$	0.00301	$\bar{b} = 0.003$
среднее число занятых приборов	$\widetilde{h} = 0.16980$	0.49760	$\bar{h} = 0.5$
среднее число свободных приборов	$\widetilde{g} = 2.83012$	2.50230	$\bar{g} = 2.5$
средняя длительность пребывания требований в системе	$\widetilde{u} = 0.20876$	0.25152	$\bar{u} = 0.2515$
средняя длительность пребывания требований в очереди	$\widetilde{w} = 0.000168$	0.00143	$\bar{w} = 0.0015$

Построенную имитационную модель можно использовать для нахождения оптимальных параметров. Например:

1. задача определения оптимального числа приборов в системе для минимизации среднего времени пребывания требований в очереди;
2. задача определения оптимального оптимального числа приборов в системе для минимизации значения стоимостной функции.

Рассмотрим задачу 1. Среднее время пребывания требования в очереди отвечает параметр $\widetilde{w}$.

Требуется найти такое число приборов в системе, чтобы среднее время пребывания требований в очереди было оптимальным.

Зададим параметры системы: $\lambda = 3$, $\mu = 5$, $k = 3$,$T = 300$.

Будем увеличивать k, пока среднее время пребывания > 0. Результат вычислений приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Вычисление характеристик СМО для $k \in [2, 6]$

k	$\widetilde{b}$	$\widetilde{h}$	$\widetilde{g}$	$\widetilde{u}$	$\widetilde{w}$
2	0.066751	0.44736	1.5526	0.20984	0.019003
3	0.005162	0.55211	2.4479	0.20519	0.001192
4	0.0006342	0.60112	3.3989	0.1935	7.4915e-0
5	0.0	0.67577	4.3242	0.19835	0.0
6	0.0	0.65171	5.3483	0.18349	0.0

Из таблицы 2 видно, что при k = 4, среднее время пребывания требований в очереди является оптимальным. Оптимальным для нас будет являться близкое к нулю значение времени пребывания требований в очереди.

Аналогично можно делать для каждого параметра системы.

Рассмотрим задачу 2.

Требуется найти такое число приборов в системе, чтобы значение стоимостной функции было минимально.

Пусть:

1. c_1 - потери от пребывания требования в очереди;
2. c_2 - потери от простоя обслуживающих приборов.

Определим функцию стоимости системы, как:

$$F(k) = c_1\widetilde{w} + (1 - \psi)c_2.$$

По условию нужно $F(k) \to min$.

Будем решать задачу сразу для 3 случаев:

1. $c_1 > c_2 \quad (c_1 = 9, c_2 = 5)$;
2. $c_1 = c_2 \quad (c_1 = c_2 = 7)$;
3. $c_1 < c_2 \quad (c_1 = 5, c_2 = 9)$;

Зададим параметры системы, $\lambda = 6$, $\mu = 1$, $n = 1000$.

Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения стоимостной функции при различных значениях k

k	$\widetilde{w}$	$1-\psi$	$F(k)$		
			$c_1 > c_2$	$c_1 = c_2$	$c_1 < c_2$
6	0.5748	0.0000	5.1735	4.0238	2.8742
7	0.4917	0.1429	5.1399	4.4421	3.7444
8	0.1315	0.2500	2.4337	2.6706	2.9076
9	0.0794	0.3333	2.3811	2.8890	3.3969
10	0.0049	0.4000	2.0438	2.8340	3.6243
11	0.0011	0.4545	2.2826	3.1895	4.0964
12	0.0000	0.5000	2.5001	3.5001	4.5000
13	0.0000	0.5385	2.6992	3.7746	4.8500

Из табличных данных видно, что функция $F(k)$, при заданных параметрах системы, достигает своего минимального значения для случая:

1. $c_1 > c_2$ при $k = 10$;
2. $c_1 = c_2$; при $k = 8$;
3. $c_1 < c_2$; при $k = 6$.

Таким образом, построенная система может считать и находить минимум функции стоимости.

Заключение В данной работе смоделирована имитационная модель, а также были разобраны задачи оптимизации систем массового обслуживания, что и является целью работы.

В работе изучены основные понятия СМО и рассчитаны основные характеристики СМО на основе имитационной модели. Проведен сравнительный анализ полученных характеристик, а также разобраны задачи оптимизации системы массового обслуживания.

Математическая модель системы $M/M/k$ была реализована. А также разработаны программы для вычисления основных характеристик СМО и решению оптимизационных задач.

В заключение можно сказать, что на основе построенной модели СМО можно оценивать эффективность функционирования реальных систем обслуживания.