МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 — Математика и компьютерные науки
Механико-математического факультета
Кашмова Тимофея Геннадьевича

Научный руководитель
профессор,д.-ф.-м.н.,профессор ______________ Д.В.Прохоров

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф. -м.н. ______________ А. М. Захаров

Саратов 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Физические процессы, которые имеют место в технике, за частую управляемы, т.е. могут осуществляться различными способами в зависимости от прихотей человека. Таким образом возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или ином смысле, оптимального управления процессом. Можно говорить, например, об оптимальности в смысле быстродействия, т.е. о достижении цели процесса за кратчайшее время, о достижении этой цели с минимальной затратой энергии и т.п. Математически сформулированные, эти вопросы являются задачами вариационного исчисления, которое и обязано им своим возникновением.

Актуальность выбранной темы в данной работе обусловлена тем, что в классическом вариационном исчислении нет решения целого ряда вариационных залач, важных для современной техники. Решение это в существенных чертах объедниияется одним общим математическим приемом, который мы называем принципом максимума. Следует заметить, что все основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными следуют из принципа максимума[1].

Целью данной квалификационной работы является рассмотрение основных постановок задач оптимального управления и вывод принципа максимума Понтрягина

Для достижения этих целий, необходимо решить следующие задачи:

- Рассмотрение поведения объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется n действительными числами;
- Постановка основной задачи
- Рассмотрение принципа максимума

Магистерская работа состоит из введения, 9 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы 55 страниц, из них 43 страница - основное содержание, включая 10 рисунков, список использованных источников информации - 29 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Допустимые управления» посвящен обозначениям, теоретическим основам и формулировке допустимых управлений.

Мы будем рассматривать поведение объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется n действительными числами x^1, x^2,..., x^n (например, координатами и скоростями). Векторное пространство X векторной переменной $x = (x^1, ..., x^n)$ является фазовым пространством рассматриваемого объекта. Поведение (движение) объекта заключается (с математической точки зрения) в том, что переменные $x^1, ..., x^n$ меняются с течением времени. Предполагается, что движением объекта можно управлять. Положение объекта характеризуется точками u некоторой области управления U, которая может быть любым множеством некоторого r-мерного евклидова пространства E_r; задание точки $u = (u^1, u^2, ..., u^r) \in U$ равносильно заданию системы числовых параметров $u^1, u^2, ..., u^r$.

В дальнейшем мы просто будем говорить об области управления U и ее точках $u \in U$ и будем представлять себе U в виде некоторого множества в пространстве переменных $(u^1, u^2, ..., u^r)$, считая его «точкой» u произвольную входящую в U систему управляющих параметров $u = (u^1, u^2, ..., u^r)$.

Каждую функцию $u = u(t)$, определенную на некотором отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ времени t и принимающую значения в области управления U мы будем называть управлением. Так как U есть множество в пространстве управляющих параметров $(u^1, u^2, ..., u^r)$ то каждое управление

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^r(t))$$

является вектор-функцией (заданной на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$), значения которой лежат в области управления U. Дальше, в зависимости от характера поставленной задачи, мы будем накладывать на управление $u(t)$ различные условия (кусочной непрерывности, кусочной дифференцируемости и т. п.). Управления, удовлетворяющие этим условням, будем называть допустимыми управлениями. В этой главе мы будем считать допустимыми управлениями произвольные кусочно-непрерывные управления[4].

Итак, допустимым управлением мы условимся называть всякую кусочно-непрерывную функцаю $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ со значениями в области управления

U, удовлетворяющую условию (11) в точках разрыва и непрерывную в концах отрезка ($t_0 \le t \le t_1$), на котором она задана. Кусочно-непрерывные управления соответствуют прелположению о «безынерционности» объекта, так как значения функции $u(t)$ могут (в момент разрыва) мгновенно перескакивать из одной точки области управления в другую.

Второй раздел «Постановка основной задачи» посвящен рассмотрению дифференциальных уравнений и оптимальных управлений, а так же сформулирована основная задача.

Мы будем предполагать, что закон движения объекта записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n, \quad u^1, ..., u^r) = f^i(x, u), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f^i(x, u), \tag{2}$$

Мы будем говорить, что допустимое управление $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, переводит фазовую точку из положения x_3 в положение x_1, если соответствующее ему решение $x(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, определено на всем отрезке $t_0 \le t \le t_1$ и проходит в момент t_1 через точку x_1, т.е. удовлетворяет также конечному условию $x(t_1) = x_1$

Предположим теперь, что задана еще одна функция $f^0(x^1, x^2, ..., x^n, u) = f^0(x, u)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\delta f^0}{\delta x^i}$, $i = 1, 2, ..., n$, на всем пространстве $X \times U$. Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом.

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{3}$$

принимает наименьшее возможное значение[7]. Здесь $x(t)$ — решение уравнения (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, а t_1—момент прохождения этого решения через точку x_1.

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной выше задачи, называется оптимальным управлением, соответствующим переходу из положения x_0 в положение x_1, а соответствующая траектория $x(t)$ — оптимальной траекторией. Таким образом, основная задача заключается в отыскании оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Третий раздел «Принцип максимума» посвящен формулировке теоремы, дающей решение поставленной основной задачи.

Для формулировки теоремы, кроме основной системы уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f'(x,u), \quad i = 0,1,2,...,n, \tag{4}$$

мы рассмотрим еще одну систему уравнений относительно вспомогательных (дополнительно рассматриваемых) переменных $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\delta f^\alpha(x,u)}{\delta x^i}\psi_\alpha, \quad i = 0,1,...,n. \tag{5}$$

Мы теперь объединим системы (4), (5) одной записью, для чего рассмотрим следующую функцию $\mathscr{H}$ переменных $x^1,...,x^n,\ \psi_0,\psi_1,...,\psi_n,\ u^1,...$ $...,u^r$:

$$\mathscr{H}(\psi,x,u) = (\psi, f(x,u)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x,u).$$

Итак, взяв произвольное допустимое (т. е. кусочно- непрерывное) управление $u(t),\ t_0 \le t \le t_1$, и начальное условие $x(t_0) = x_0$, мы можем найти соответствующую. После этого мы можем находить соответствующую функциям $u(t)$ и $x(t)$ решения

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t)).$$

При фиксированных (постоянных) значениях ψ и x функция $\mathscr{H}$ становится функцией параметра $u \in U$, точную верхнюю грань значений этой функцин мы обозначим через $\mathscr{M}(\psi, x :)$

$$\mathscr{M}(\psi,x:) = \sup_{u\in U} \mathscr{H}(\psi,x,u).$$

Если точная верхняя грань значений непрерывной функции $\mathscr{H}$ достигается в некоторой точке области управления U, то $\mathscr{M}(\psi, x)$ есть максимум значений функции $\mathscr{H}$ при фиксированных ψ и x. Поэтому нижеследующую теорему 1 (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (6), мы называем принципом максимума[11].

Теорема 1. *Пусть $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходит в момент t_1 через некоторую точку прямой Π. Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t))$ соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:*

1. *при любом $t, t_0 \leq t \leq t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t)); \tag{6}$$

2. *в конечный момент t_1 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0 \tag{7}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t), x(t), u(t)$ удовлетворяют условию 1, то функции $\psi(t)$ и $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений (7) можно проводить не обязательно в момент t_1, а в любой момент t, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Четвертый раздел «Обсуждение принципа максимума» рассуждения над теоремой 1.

Теорема 1 позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке x_0 и кончающихся в некоторой точке прямой Π, и соответствующих им управлений выделить лишь отдельные, изолированные траектории и управления, удовлетворяющие всем сформулированным условиям.

Если, в частности, условиям теоремы 1 удовлетворяет лишь одна траектория, соединяющая точку x_0 с точкой прямой Π, а из технических соображений, приведших к постановке оптимальной задачи, «ясно», что оптимальная траектория должна существовать, то можно надеяться, что найденная траектория как раз и является оптимальной. Следует, однако, отметить, что математически вопрос о существовании оптимальной траектории представляется очень важным и трудным[13].

Пятый раздел «Пример. Задача синтеза» посвящен приложению, которое находит оптимальные траектории заданного уравнения.

Рассматривается уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = u$, где $u-$ вещественный управляющий параметр, подчиненный условию $|u| \leq 1$. В фазовых координатах $x^1 = x,\ x^2 = \frac{dx}{dt}$ уравнение переписывается в виде следующей системы:

$$\frac{dx^1}{dt} = x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = u. \tag{8}$$

Далее рассматриваем (для фазовой точки, движущейся по закону (8)) задачу о быстрейшем попадании в начало координат $(0,0)$ из начального состояния x_0. Иначе говоря, рассматриваем задачу об оптимальном быстродействии в случае, когда конечным положением служит начало координат: $x_1 = (0,0)$. С помощью программы находим оптимальные траектории.

Шестой раздел «Задача с подвижыми концами и условие трансверсальности» посвящен рассмотрению необходимых геометрических понятий и формулировке задачи оптимального управления.

Пусть S_0 и S_1- гладкие многообразия произвольных (но меньших, чем n) размерностей r_0, r_1, расположенные в пространстве X. Поставим задачу: найти допустимое управление $u(t)$, которое переводит фазовую точку из некоторого (заранее не заданного) положения $x_0 \in S_0$ в некоторое положение $x_1 \in S_1$ и при этом придает функционалу J минимальное значение. Эту задачу мы и будем называть оптимальной задачей с подвижными концами. Если оба многообразия S_0, S_1, вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в прежнюю задачу с закрепленными концами.

Формулировка условий трансверсальности. Пусть $x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1-$ некоторые точки, а T_0 и T_1- касательные плоскости многообразий S_0 и S_1, проведенные в этих точках. Плоскости T_0 и T_1 расположены в пространстве X и имеют размерности соответственно $r_0,\ r_1$. Пусть, далее, $u(t), x(t), t_0 \leq t \leq t_1, -$ решение оптимальной задачи с закрепленными концами x_0 и x_1. Наконец, пусть $\psi(t)-$ вектор, существование которого утверждается в теореме 1. Мы будем говорить. что вектор $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории $x(t)$ (т.е. в точке $x(t_1)$), если вектор

$\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), ..., \psi_n(t_1))$ ортогонален плоскости T_1. Пользуясь условиями трансверсальности, формулируем теперь решение задачи с подвижными концами[17].

Теорема 2. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, – допустимое управление, переводящее фазовую точку из некоторого положения $x_0 \in S_0$ в положение $x_1 \in S_1$, а $x(t)$– соответствующая траектория (исходящая из точки $x_0 = (0, x_0)$). Для того чтобы $u(t)$ и $x(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижными концами, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям, указанным в теореме 1, и, кроме того, условию трансверсальности в обоих концах траектории $x(t)$.*

Разумеется, если одно из многообразий S_0, S_1 вырождается в точку, то условие трансверсальности в соответствующем конце траектории $x(t)$ заменяется условием прохождения траектории $x(t)$ через эту точку.

Седьмой раздел «Принцип максимума для неавтономных систем» посвящен выводу принципа максимума для неавтономных систем, при помощи условия трансверсальности полученном в шестом разделе.

здесь мы рассматриваем оптимальную задачу такого же вида, как и (1), (3), но в случае, когда функции f^α явно зависят от времени (область управления U предполагается не зависящей от времени). Таким образом, закон движения объекта и функционал, минимум которого ищется, принимают в рассматриваемом случае вид

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 1, 2, ..., n; \tag{9}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt. \tag{10}$$

Для решения этой задачи вводим еще одно вспомогательное неизвестное x^{n+1}, изменяющееся по закону

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \qquad x^{n+1}(t_0) = t_0$$

Мы должны найти оптимальную траекторию, соединяющую в пространстве X^* точку $(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n, t_0)$ с некоторой точкой прямой S_1, проходящей через точку $(x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n, 0)$ параллельно оси x^{n+1} (ибо конечное значение переменного x^{n+1}, т. е. момент времени, когда движущаяся точка приходит в положение x_1, не является заранее заданным). Таким образом, мы приходим к обычной оптимальной задаче с закрепленным левым концом и подвижным правым концом.

Далее пишем принцип максимума и условие трансверсальности для полученной задачи. Вспомогательная система уравнений имеет вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\delta f^\alpha}{\delta x^i}\psi_\alpha, \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{11}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\delta f^\alpha}{\delta t}\psi_\alpha. \tag{12}$$

Согласно теоремам 1 и 3, для решения рассматриваемой задачи составляем функцию $\mathscr{H}$.

$$\mathscr{H}(\psi, x, t, u) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + ... + \psi_n f^n(x, u, t),$$

Условие трансверсальности в правом конце траектории показываст, что прямая S_1 (параллельная оси x^{n+1}) ортогональна вектору $(\psi_1(t_1),$
$\psi_2(t_1), ..., \psi_{n+1}(t_1))$. Иначе говоря, $\psi_{n+1}(t_1) = 0$[25].

Итак, мы получаем следующую теорему (принцип максимума для неавтономных систем).

Теорема 3. *Пусть $u(t),\ t_0 \le t \le t_1,$ —такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходит в момент t_1 через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:*

- ***a.*** *для всех $t, t_0 \le t \le t_1$, функция, $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t); \tag{13}$$

b. *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t) = const \leq 0,$$

$$\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\delta f^{\alpha}(x(t), u(t), t)}{\delta t} \psi_{\alpha}(t) dt. \quad (14)$$

*Оказывается, далее, что если величины $\psi(t), x(t), u(t)$ удовлетворяют системе (11) и условию **a**, то функция $\psi_0(t)$ переменного t постоянна, а функция $\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t)$ может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного во втором соотношении (14), так что проверку соотношений (14) достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени t, $t_0 \leq t \leq t_1$: например, вместо (14) достаточно проверить соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \qquad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1), t_1) = 0. \quad (15)$$

Восьмой раздел «Задача с закрепленным временем» рассматриваем такую же оптимальную задачу, что и в разделе 2 (или в разделе 7, т. е с зависимостью функций f^{α} от времени), но с условием, что время t_0 начала движения точки (из положения x_0) и время t_1 ее попадания в точку x_1, заданы заранее, так что время $t_1 - t_0$ закреплено[27].

Решение этой задачи мы легко получаем из предыдущих рассмотрений.

Как и в предыдущей главе, добавим к системе уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \qquad i = 1, 2, ..., n \quad (16)$$

еще одно уравнение

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$$

с начальным условием $x^{n+1}(t_0) = t_0$. Тогда $x^{n+1} = t$, и мы приходим к слелующей оптимальной задаче.

В $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x^1, ..., x^n, x^{n+1}$ заданы две точки (x_0, t_0) и $((x_1, t_1)$. Фазовая точка движется по закону

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, x^{n+1}), \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1.$$

Нужно найти управление $u(t)$, под воздействием которого фазовая точка переходит (начав движение в момент t_0) из положения (x_0, t_0) в положение (x_1, t_1), а функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, x^{n+1})dt \tag{17}$$

принимает наименьшее возможное значение.

Согласно теореме 1, для решения задачи вводим переменное x^0, составляем функцию

$$\mathscr{H}^* = \mathscr{H} + \psi_{n+1} = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1}$$

и рассматриваем для вспомогательных переменных ψ_i следующую систему уравнений:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta x^i}, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{18}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta t}.$$

Мы получаем, следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $-$допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)-$ соответствующая траектория, так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ (моменты времени t_1, t_1 фиксированы). Для того чтобы $u(t)$ давало решение поставленной оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:*

a. *для всех t, $t_0 \leq t \leq t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t).$$

b. *функция $\psi_0(t)$ неположительна (что достаточно проверить лишь в какой-либо одной точке отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, так как, в силу (18), $\psi_0 = const$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы мы сформулировали принцип максимума, а также рассмотрели примеры и решение задачи о точках достижимости управляемого процесса. Также была написана программа нахождения оптимальной траекторий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Понтрягин, Л.С, Болтянский, В.Г, Гамкрелидзе, Р.В, Мищенко, Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4 издание. –М.: Наука, 1983. – 392 с.

2 Ведякова, А.О., Милованович, Е.В., Слита, О.В., Тертычный-Даури, В.Ю. Методы теории оптимального управления. Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2021. – 219 с.

3 Айзерман, М.А. Теория автоматического управления. – М.: Наука, 1966. – 452 с.

4 Арутюнов, А.В., Магарил-Ильяев, Г.Г., Тихомиров, В.М. Принцип максимума Понтрягина. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 144 с.

5 Афанасьев, А.П., Дикусар, В.В., Милютин, А.А., Чуканов, С.В. Необходимое условие в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1990. – 318 с.

6 Ащепков, Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. Прикладная математика и механика. – М.: Наука, – 1981. – 222 с.

7 Ащепков, Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. – М.: Наука, 1987. – 225 с.

8 Брайсон, А., Хо, Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

9 Бутенин, Н.В., Фуфаев, Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1991. – 256 с.

10 Бутковский, А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

11 Быков, Я.В. О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. – Фрунзе.: Изд-во Киргиз., ун-та, 1957. – 327 с.

12 Ван-Трис, Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. – М.: Мир, 1964. – 167 с.

13 Варга, Дж. Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 624 с.

14 Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

15 Величенко, В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, 1966. – 30 с.

16 Верлань, А.Ф., Сизиков, В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев.: Наукова думка, 1986. – 542 с.

17 Винокуров, В.Р. Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями. – М.: Наука, – 1967. – 25 с.

18 Гамкрелидзе, Р.В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. АН СССР. – 1960. – 356 с.

19 Абуладзе, А.А. О необходимых условиях оптимальности для систем, описываемых интегральными уравнениями. АН ГССР, – 1985. – 52 с.

20 Гамкрелидзе, Р.В. Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач. АН СССР, – 1971. – 180 с.

21 Гамкрелидзе, Р.В. Основы оптимального управления. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1977. – 254 с.

22 Владимиров, В.С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц. АН СССР, – 1957. – 710 с.

23 Владимиров, В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. АН СССР, – 1961. – 159 с.

24 Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

25 Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

26 Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

27 Габасов, Р. Ф. Необходимые условия оптимальности для системы интегральных уравнений. Дифференц. уравнения. – 1969. – 953 с.

28 Габасов, Р. Ф. Кириллова, Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

29 Габасов, Р. Ф. Кириллова, Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика. – М.: Наука, – 1972. – 62 с.