МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Уравнение Лёвнера с управляющей функцией Вейерштрасса и задача о вычислении числа Бомбиери

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Сидоровой Аллы Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ______________ Гордиенко В.Г.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | фамилия, инициалы

Зав. кафедрой
и.о. зав. кафедрой, к. ф.-м.н. ______________ Захаров А.М.
должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | фамилия, инициалы

Саратов 2023

Введение. Целью моей выпускной квалификационной работы является знакомство с уравнением Лёвнера для полуплоскости, когда в качестве управляющей функции выступает функция Вейерштрасса, а также нахождение числа Бомбиери.

В ходе работы решаются следующие задачи:

- рассмотреть основные свойства уравнения Лёвнера для полуплоскости;
- познакомиться с функцией Вейерштрасса;
- построить на языке Python двумерное множество, которое генерируются уравнением Лёвнера, если в качестве управляющей функции взять функцию Вейерштрасса;
- рассмотреть задачу Бомбиери для нахождения числа σ_{42};
- написать программный код для решения данной задачи.

В первой части выпускной квалификационной работы я рассматриваю уравнение Лёвнера для полуплоскости, где в качестве управляющей функции выступает детерминированный аналог броуновского движения, функция Вейерштрасса, которая, как и броуновское движение, непрерывна, и нигде не дифференцируема. В частности я буду работать с функцией

$$W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n/2} cos(2^n t).$$

В сравнении с SLE я стремлюсь понять двумерные множества, которые генерируются уравнением Лёвнера, если в качестве управляющей функции взять функцию Вейерштрасса. Буду называть это семейство множеств «деформациями, управляемые функцией Вейерштрасса», и основная теорема, рассмотренная в первой части работы, устанавливает существование по крайней мере одного фазового перехода, как и в общем случае SLE.

Теорема 0.1. Деформации, обусловленные функцией Вейерштрасса $W(t)$, имеют фазовый переход. В частности, для достаточно малых c, халл, генерируемый функцией $cW(t)$, является простой кривой в $\mathbb{H} \cup cW(0)$ и не является простой кривой в случае, если c достаточно велико.

Для доказательства теоремы понадобится следующий результат, который дает нижнюю границу роста функции Вейерштрасса вблизи ее локальных максимумов.

Теорема 0.2. Пусть $t_{m,k} = m\pi/2^k$, где $m, k \in \mathbb{N}$. Если $0 < |h| \leq 2^{-(k+7)}$, то

$$W(t_{m,k}) - W(t_{m,k} + h) \geq 0.2\sqrt{|h|}.$$

Из этого результата следует, что $W(t)$ имеет локальные максимумы в точках вида $2^{-k}m\pi$.

Во второй части работы рассматривается уравнение Лёвнера в круге, с помощью которого решается задача Бомбиери.

Бомбиери привел доказательство локальной гипотезы Бибербаха о точной оценке $|\ a_n\ | \leq n, n \geq 2$ в классе S и поставил там же задачу о нахождении чисел

$$\sigma_{mn} = \lim_{a_m \to m} \inf \frac{n - Re(a_n)}{m - Re(a_m)} = \lim_{f \to K} \inf \frac{n - Re(a_n)}{m - Re(a_m)} \qquad m, n \geq 2,$$

где f стремится к K локально равномерно внутри D.

Используя параметрическое представление Лёвнера и метод оптимального управления было вычислено число Бомбиери σ_{42}.

Основное содержание работы. Уравнение Лёвнера устанавливает соответствие между непрерывными вещественными функциями и некоторыми растущими семействами множеств на комплексной плоскости. Пусть λ — непрерывная, вещественнозначная функция, заданная на отрезке $[0, T]$. Выберем начальную точку $z_0 \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \lambda(0)$, где $\mathbb{H} = \{x + iy : y > 0\}$ обозначает верхнюю полуплоскость. Тогда задача Коши для дифференциального уравнения Лёвнера имеет вид:

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{2}{z(t) - \lambda(t)}, \quad z(0) = z_0. \tag{1.1}$$

На самом деле решение $z(t)$ будет продолжать существовать, если знаменатель в (1.1) не равен нулю. Если в некоторый момент времени $z(s) = \lambda(s)$, то z_0 захватывается λ в момент времени s. Определим халл в момент времени

t и обозначим его через K_t, как совокупность захваченных точек:

$$K_t = \{z_0 \in \overline{\mathbb{H}} : z(s) = \lambda(s), s \leq t\}.$$

Это семейство халлов $\{K_t\}_{t\in[0,T]}$ есть возрастающее семейство множеств, соответствующих $\lambda(t)$ через уравнение Лёвнера. Назовем $\lambda(t)$ управляющей функцией и будем говорить, что K_t порождается $\lambda(t)$.

Рассмотрим кратко пример.

Пример 1.3. Пусть $\lambda(t) = -c\sqrt{1-t}$ с $0 < c < 4$. K_t является простой кривой для всех $t \in [0,1]$. Если $c \geq 4$, то K_t для значений $t < 1$ остается простой кривой. Однако при $t = 1$ геометрия ситуации меняется. В момент времени $t = 1$ простая кривая возвращается на действительную ось и образует «пузырь», так что окончательный халл K_t представляет собой кривую, точки в $\mathbb{H}$ под кривой и интервал вещественной оси. Это показано на рисунках 1.3 и 1.4. Халлы K_t, порожденные $-c\sqrt{1-t}$ для $c = 3$ и $c = 5$.

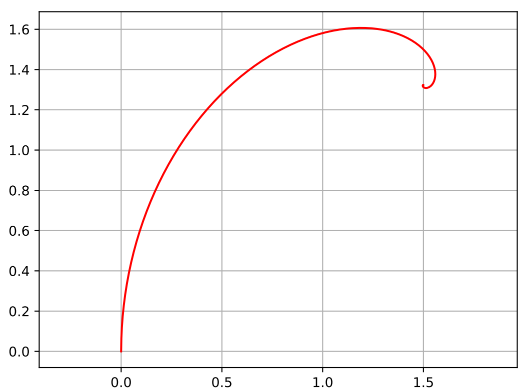

Рисунок 1.3

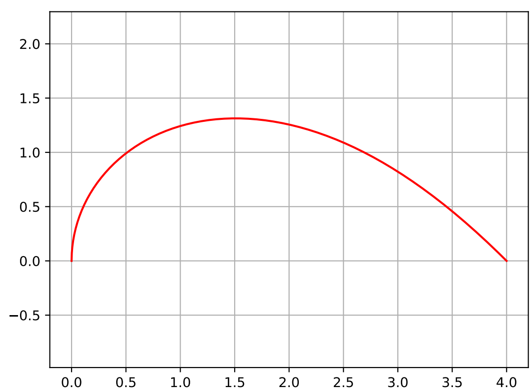

Рисунок 1.4

Далее перейдем к функции Вейерштрасса. Карл Вейерштрасс ввел функцию Вейерштрасса в 1872 году, опубликовав первый пример непрерывной функции, которая нигде не дифференцируема. Это функция может быть записана в виде:

$$F_{a,b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n t),$$

где параметр $a \in (0,1)$, а параметр $b \geq 1/a^2$. Мы будем рассматривать случай при $a = 1/\sqrt{2}$ и $b = 2$, поэтому определим

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} cos(2^n t).$$

В 1916 г. Харди доказал, что при таком выборе параметров, $W(t)$ является функцией $Lip(1/2)$. Приведем доказательство результата Харди, позволяющее вычислить верхнюю границу нормы $Lip(1/2)$ для функции $W(t)$.

Предложение 2.1. *$Lip(1/2)$ норма функции $W(t)$ удовлетворяет неравенству: $||W(t)||_{1/2} \leq 12$.*

Этот результат дополняет теорему, которая дает нижнюю оценку локальной версии нормы $Lip(1/2)$.

Используем свойства уравнения Лёвнера, обсуждавшиеся ранее, и свойства функции Вейерштрасса, чтобы доказать наш основной результат - теорему 0.1.

Для рассмотрения возьмем границу c для фазового перехода, равную 4.

В качестве иллюстрации на языке Python написана программа, которая позволяет увидеть существование фазового перехода в зависимости от константы c.

На рисунках 3.1 и 3.2 представлены результаты работы программы при значении $c = 1$.

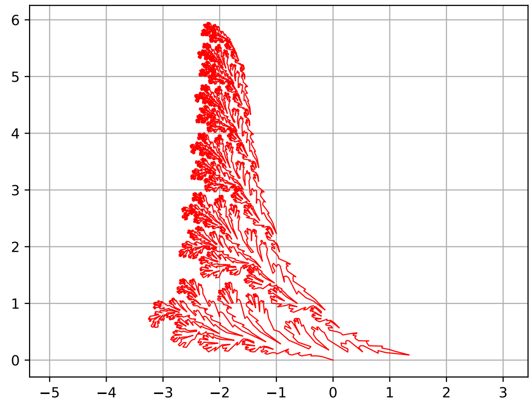

Рисунок 3.1

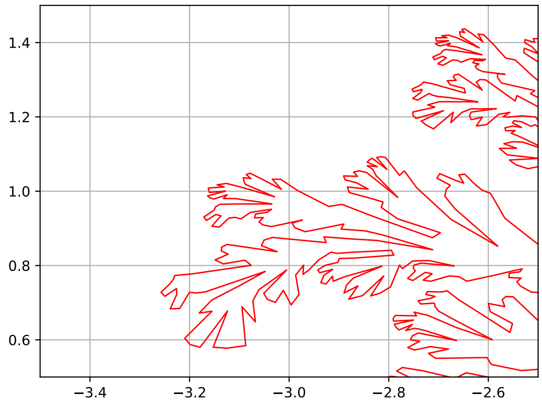

Рисунок 3.2

Видно, что халл является простой кривой. График не имеет самопересечений, что можно видеть на приближении 3.2.

На рисунке 3.3 представлены результаты работы программы при значении $c = 5$.

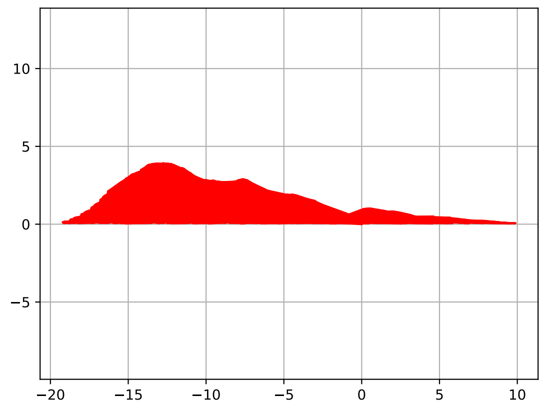

Рисунок 3.3

Видно, что халл не является простой кривой, а замыкается на вещественной оси.

Далее рассмотрим задачу Бомбиери. Он предложил описать строение множества значений начальных коэффициентов нормированных конформных отображений круга в окрестности угловой точки, соответствующей функции Кёбе. Числа Бомбиери характеризуют предельные положения опорных гиперплоскостей, проходящих через критическую угловую точку. Для ее решения, в качестве вспомогательного средства, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Лёвнера для круга.

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \qquad w(0) = z, \qquad t \geq 0, \tag{4.1}$$

где функция управления $u = u(t)$ кусочно непрерывна при $t \geq 0$.

Сделаем замену $t \to 1 - e^{-t}$.

Тогда уравнение будет примет вид

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-w}{1-t} \cdot \frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \qquad w(0) = z, \qquad 0 \leq t \leq 1 - 1/M. \tag{4.2}$$

Интегралы

$$w(z,t) = (1-t)(z + a_2(t)z^2 + ...) \tag{4.3}$$

уравнения (4.2) представляют собой всюду плотный подкласс функций $f \in S^M$.

Для того, чтобы задачу отыскания числа Бомбиери сформулировать в терминах оптимального управления, необходимо записать систему для начальных коэффициентов функции, порожденной уравнением Лёвнера. Отделяя действительную и мнимую части, получим фазовую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -2\cos u, \qquad x_1(0) = 0\\
\dot{x}_2(t) &= 2\sin u, \qquad x_2(0) = 0\\
\dot{x}_3(t) &= -4(x_1\cos u + x_2\sin u) - 2(1-t)\cos 2u, \qquad x_3(0) = 0\\
\dot{x}_4(t) &= -4(x_2\cos u - x_1\sin u) + 2(1-t)\sin 2u, \qquad x_4(0) = 0\\
\dot{x}_5(t) &= -2((x_1^2 - x_2^2 + 2x_3)\cos u + 2(x_1x_2 + x_4)\sin u) -\\
&- 6(1-t)(x_1\cos 2u + x_2\sin 2u) - 2(1-t)^2\cos 3u, \qquad x_5(0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Отметим, что случай $u = \pi$ соответствует функции Кёбе в классе S или функции Пика в классе S^M. Кроме того, всюду плотный подкласс S^M содержит все функции, задающие граничные точки области коэффициентов

$$V_4^M = \{(a_2, a_3, Re(a_4)) : f \in S^M\}, \quad 1 \le M \le \infty.$$

Задача о вычислении чисел Бомбиери сводится к определению линейных функционалов на классе S, локальный экстремум которых дается функцией Кёбе. Экстремальная задача

$$ReL(\mu,\nu,f) \longrightarrow max,$$

где $L(\mu,\nu,f) = a_2 + \mu a_3 + \nu a_4$, а $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, эквивалентна экстремальной задаче

$$x_1(1-1/M) + \mu x_3(1-1/M) + \nu x_5(1-1/M) \longrightarrow max. \tag{4.5}$$

Параметрическое представление для коэффициентов, порожденных уравнением Лёвнера, позволяет применить принцип максимума Понтрягина. Запишем функцию Гамильтона этой экстремальной задачи,чтобы сформулировать необходимые условия экстремума

$$\begin{aligned}
H(t,x,\Psi,u) &= -2\cos u\Psi_1 + 2\sin u\Psi_2 - \\
&- \big(4(x_1\cos u + x_2\sin u) + 2(1-t)\cos 2u\big)\Psi_3 - \\
&- \big(4(x_2\cos u - x_1\sin u) - 2(1-t)\sin 2u\big)\Psi_4 - \\
&- \big(2((x_1^2 - x_2^2 + 2x_3)\cos u + 2(x_1x_2 + x_4)\sin u) + \\
&+ 6(1-t)(x_1\cos 2u + x_2\sin 2u) + 2(1-t)^2\cos 3u\big)\Psi_5, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ удовлетворяет системе 1, а $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_5)^T$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot\Psi_1(t) &= 4\cos u\Psi_3 - 4\sin u\Psi_4 + (4x_1\cos u + 2x_2\sin u + 6(1-t)\cos 2u)\Psi_5, \\
\dot\Psi_2(t) &= 4\sin u\Psi_3 + 4\cos u\Psi_4 + (-4x_2\cos u + 2x_1\sin u + 6(1-t)\sin 2u)\Psi_5, \\
\dot\Psi_3(t) &= 4\cos u\Psi_5, \\
\dot\Psi_4(t) &= 4\sin u\Psi_5, \\
\dot\Psi_5(t) &= 0 \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

и условиям трансверсальности

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(1-1/M) = 1, \qquad \Psi_3(1-1/M) = \mu, \qquad \Psi_5(1-1/M) = \nu, \\
&\Psi_2(1-1/M) = \Psi_4(1-1/M) = 0. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Оптимальная управляющая функция u соответствующая экстремальной функции $f^* \in S^M$ в (4.5), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина

$$\max_u H(t,x,\Psi,u) = H(t,x^*,\Psi^*,u^*), \qquad 0 \le t \le 1-1/M, \qquad (4.9)$$

где (x^*, Ψ^*) является решением систем (4.4) и (4.7) с $u = u^*$ в их правых частях.

Для определения координат вектора начальных данных сопряженной гамильтонвой системы воспользуемся условием трансверсальности. В этом случае координаты решения $(x(t), \Psi(t)) = (x^0(t), \Psi^0(t))$ вычисляются по данным формулам.

При интегрировании выражений при условии $x_j(0) = 0, j = 1, ..., 4$ и $u = u^* = \pi$ получим системы:

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= 2t \\ x_3(t) &= 5t^2 - 2t \\ x_2^0(t) &= x_4^0(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^0(t) &= \nu(t - 1 + 1/M)^2 + (14\nu/M - 8\nu - 4\mu)(t - 1 + 1/M) + 1 \\ \Psi_3^0(t) &= \mu - 4\nu(t - 1 + 1/M) \\ \Psi_5^0(t) &= \nu \\ \Psi_2^0(t) &= \Psi_4^0(t) = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Обозначим через $D(M)$ максимальную область в (μ, ν)-плоскости, звездообразную относительно начала координат и удовлетворяющую следующим условиям :

1) $H(t, u)$ как функция $y = \cos u$ достигает своего максимума на $[-1, 1]$ только при $y = -1$ для всех $t \in [0, 1 - 1/M]$;

2) $H_{uu}(t, x, \Psi, u) \neq 0, 0 \leq t \leq 1 - 1/M$.

Будем рассматривать $(\mu, \nu) \in D(M)$. Точка $x^0(1 - 1/M)$ принадлежит границе ∂V_4^M области V_4^M и задается функцией Пика.

Лемма 4.2. Пусть $(\mu, \nu) \in D(M)$ и пусть $x^-(t, \xi), \Psi^-(t, \xi)$ решение задач (4.4) и (4.7) с краевыми условиями $\Psi^-(1 - 1/M, \xi) = \Psi^0(1 - 1/M) + \xi$. Пусть управляющая функция $u = u^-(t, \xi)$ правых частях систем (4.4) и (4.7) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Если

$$\|x^-(1 - 1/M, \xi) - x^0(1 - 1/M)\| = o(1), \qquad \xi \to 0,$$

то

$$\|\Psi^{-}(0,\xi)-\Psi^{0}(0)\|=o(1).$$

Лемма 4.3. Пусть $(\mu,\nu)\in D(M)$ и начальные условия в (4.7) равны

$$\Psi(0,\xi)=\Psi^{0}(0)+\xi,\qquad \xi=\varepsilon e,\qquad \varepsilon>0,\qquad e=(e_1,...,e_5)^T,\qquad \parallel e\parallel=1 \tag{4.14}$$

и

$$x(t,\xi)=x^{0}(t)+\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{4.15}$$

Тогда вектор $\Psi^{0}(1-1/M)$ ортогонален $\delta x(1-1/M)$, если $\delta x(1-1/M)\neq 0$.

Лемма 5.1. В условии леммы 4.3 предположим, что вектор $e=(e_1,...,e_5)^T$, который соответствует вариации $\Psi^0(0)$ в (4.14) с нулевыми координатами e_2, e_4. Тогда $\delta x(1-1/M)=0$.

Аналогично равенству (4.15) запишем разложение для сопряженного вектора

$$\Psi(t,\xi)=\Psi^{0}(t)+\varepsilon\delta\Psi(t)+o(\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0.$$

Из лемм 4.1—5.1 следует, что для изучения характера точки $x^0(1-1/M)$ из границы V_4^M следует рассмотреть вариации по (4.14) с $e_1=e_3=e_5=0$.

Пусть $\xi=(0,p,0,q,0)$ с произвольными вещественными p и q. Изучим $x(1-1/M,\xi)$ в окрестности точки $x^0(1-1/M)$. Другими словами, будем решать систему (4.7), в которой координаты вектора начальных данных задаются формулами:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(0) &= 3\nu(1-1/M)(3-5/M)+4\mu(1-1/M)+1\\
\Psi_2(0) &= p\\
\Psi_3(0) &= \mu+4\nu(1-1/M)\\
\Psi_4(0) &= q\\
\Psi_5(0) &= \nu.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Пусть

$$F:(p,q)\longrightarrow x_1(1-1/M)+\mu x_3(1-1/M)+\nu x_5(1-1/M).$$

Лемма 5.2. Предположим, что $(\mu,\nu)\in D(M)$. Если функция Пика P_M доставляет локальный максимум значениям $ReL(\mu,\nu,f)$ в классе $S(M)$, то

$$F_{pp}(0,0)\leq 0$$
$$F_{pp}(0,0)F_{qq}(0,0)-F_{pq}^2\geq 0.$$

Обратно, если

$$F_{pp}(0,0)<0$$
$$F_{pp}(0,0)F_{qq}(0,0)-F_{pq}^2>0,$$

то P_M доставляет локальный максимум значениям $ReL(\mu,\nu,f)$ в классе $S(M)$.

Далее получили алгоритм вычисления $F_{pp}(0,0)$, выраженный следующей леммой.

Лемма 5.3. Пусть $(\mu,\nu)\in D(M)$ и $(x_1)_{pp},(x_3)_{pp},(x_5)_{pp},(x_2)_p,(x_4)_p,(\Psi_2)_p,t\in[0,1-1/M]$ решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (5.12)-(5.17). Тогда справедливо равенство

$$F_{pp}(0,0)=(x_1)_{pp}(1-1/M)+\mu(x_3)_{pp}(1-1/M)+\nu(x_5)_{pp}(1-1/M).$$

Вычисление F_{qq} и F_{pq} произведем аналогичным образом.

Лемма 5.4. Пусть $(\mu,\nu)\in D(M)$ и $(x_1)_{qq},(x_3)_{qq},(x_5)_{qq},(x_2)_q,(x_4)_q,(\Psi_2)_q,t\in[0,1-1/M]$ решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (5.18)-(5.23). Тогда справедливо равенство

$$F_{qq}(0,0)=(x_1)_{qq}(1-1/M)+\mu(x_3)_{qq}(1-1/M)+\nu(x_5)_{qq}(1-1/M).$$

Пусть $(\mu,\nu)\in D(M)$ и $(x_2)_q,(x_4)_p,(\Psi_2)_p$ и $(x_1)_{pq},(x_3)_{pq},(x_5)_{pq}$, $t\in[0,1-1/M]$ решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (5.15)-(5.17) и (5.24)-(5.26). Тогда справедливо равенство

$$F_{pq}(0,0) = (x_1)_{pq}(1 - 1/M) + \mu(x_3)_{pq}(1 - 1/M) + \nu(x_5)_{pq}(1 - 1/M).$$

Применим теперь леммы 5.2-5.4 для вычисления числа Бомбиери, равного супремуму по всем действительным значениям λ_{42} таким, что $Re(a_2 - \lambda_{42}a_4)$ локально максимизируется функцией Кёбе в S.

Численные методы, примененные для решений (5.12)-(5.26), позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.1. Число Бомбиери σ_{42} равно 0,050057..., то есть максимальному отрицательному корню уравнения (6.2), умноженному на (-1), где $(x_1)_{pp}, (x_3)_{pp}, (x_5)_{pp}, (x_2)_p, (x_4)_p, (\Psi_2)_p, (x_1)_{qq}, (x_3)_{qq}, (x_5)_{qq}, (x_2)_q, (x_4)_q, (x_2)_q,$ $(x_4)_p, (\Psi_2)_p, (x_1)_{pq}, (x_3)_{pq}, (x_5)_{pq}$ являются решениями задачи Коши для дифференциальных уравнений (5.12)-(5.26) при $\mu = 0$ и $M = \infty$.

Для численного решения поставленной задачи была использована система Wolfram Mathematica.

Заключение. В ходе работы было произведено знакомство с уравнением Лёвнера для полуплоскости, когда в качестве управляющей функции выступает функция Вейерштрасса. Были рассмотрены основные теоремы, касающиеся данной управляющей функции, и разобраны их доказательства. Некоторые свойства функции Вейерштрасса были проиллюстрированный с помощью графиков, построенных путем написания программы на языке Python. Была написана программа для построения халла, являющегося решением уравнения Лёвнера с управляющей функцией Вейерштрасса при различных значениях c.

Во второй части работы была рассмотрена задача Бомбиери в классе S однолистных функций для нахождения числа σ_{42}. Разработан численный алгоритм на языке Wolfram Mathematica, который позволяет найти число Бомбиери σ_{42}.