МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Обобщенные производные и анизотропные пространства С.Л.Соболева

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Морозова Кирилла Максимовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент Л.В. Сахно

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н. А.М. Захаров

Саратов 2023

Введение. Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-е годы в результате работ С.Л. Соболева и интенсивно разрабатывалась на протяжении последних двух десятилетий многими учеными.

Изучение данной темы играет большую роль при установлении различных связей и соотношений между дифференциально-разностными свойствами функций в различных метриках, а так же при выводе неравенств между различными производными.

Целью данной работы является изучение анизотропных пространств Соболева и изучение теорем вложения.

Данная работа состоит из нескольких глав. В первой главе изложены определение пространства $L_{\mathbf{p}}$, его свойства, а так же основные интегральные неравенства. В второй главе рассматриваются различные интегральные представления дифференцируемых функций. В третьей главе рассматриваются анизотропные пространства Соболева, их свойства, а так же различные методы распространения функций. В четвертой главе изложены теоремы вложения пространства $W^{\mathbf{1}}_{\mathbf{p}}(G)$ в пространства $L_{\mathbf{q}}(G)$, $C(G)$, и в класс Орлича.

Основное содержание работы. Сформулируем свойства пространств $L_{\mathbf{p}}$ вещественных функций, определенных на измеримом множестве $G \subset E^n$, где E^n это n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$. Измеримость множеств понимается в смысле интеграла Лебега.

Определение 1.1.1. Пусть p - вещественное число, $1 \le p < \infty$. Через $L_p(G)$ будем обозначать пространство измеримых на G функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ интегрируема в смысле Лебега на G.

Определение 1.1.2. Число

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}\,(G)} = \|f\|_{p,\,G} = \Big(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

называется нормой элемента $f \in L_p\,(G)$.

Определение 1.1.3. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор с компонентами, удовлетворяющими неравенствам $1 \le p \le \infty$ $(i = 1, \dots, n)$.

Через $L_{\mathbf{p},E^n}$ будем обозначать пространство измеримых на E^n функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathbf{p},E^n} = \|f\|_{(p_1,\ldots,p_n),E^n} = \|\ldots\|\|f\|_{p_1,x_1}\|_{p_2,x_2}\ldots\|_{p_n,x_n} =$$
$$= \left\{\int\limits_{E^1}\left[\ldots\left\{\int\limits_{E^1}\left(\int\limits_{E^1}|f(x)|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right\}^{\frac{p_3}{p_2}}\ldots\right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dx_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Сформулируем основые свойства пространств $L_{\mathbf{p}}$.

Определение 1.1.5. Свойства пространств $L_{\mathbf{p}}\,(G)$:

1) $\|f\|_{\mathbf{p},\,G} = 0$ эквивалентно $f(x) = 0$ почти для всех $x \in G$.

2) $\|cf\|_{\mathbf{p},\,G} = |c|\,\|f\|_{\mathbf{p},\,G}$.

3) $\|f_1 + f_2\|_{\mathbf{p},\,G} \le \|f_1\|_{\mathbf{p}\,,G} + \|f_2\|_{\mathbf{p},\,G}$.

4) Пространство $L_{\mathbf{p}}\,(G)$ - полное, т.е. если $f_k \in L_{\mathbf{p}}\,(G)$ $(k = 1,2,\ldots)$, $\|f_k - f_l\|_{\mathbf{p},\,G} \to 0 \quad (k,l \to \infty)$, то существует функция $f \in L_{\mathbf{p}}\,(G)$ такая, что $\|f_k - f\|_{\mathbf{p},\,G} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Определение 1.1.7. Функция $f \in L_{\mathbf{p}}(G)$ называется непрерывной (в целом) в $L_{\mathbf{p}}(G)$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\|f(\cdot + y) - f\|_{\mathbf{p},E^n} < e,$$

как только $|y| < \delta$, где $|y| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Определение 1.1.8. Всякая функция $f \in L_{\mathbf{p}}(G)$, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} < \infty$, непрерывна в целом в $L_{\mathbf{p}}(G)$.

Определение 1.1.12. Множество S пространства $L_{\mathbf{p}}(G)$ называется плотным в $L_{\mathbf{p}}(G)$, если для каждого $f \in L_{\mathbf{p}}(G)$ и любого $\epsilon > 0$ найдется элемент $\varphi_\epsilon \in S$ такой, что

$$\|\varphi_\epsilon - f\|_{\mathbf{p},G} < \epsilon.$$

Рассмотрим интегральные неравенства, которые будут применяться в дальнейшем.

Определение 1.2.1. Неравенство Гёльдера. Пусть $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, $f_1 \in L_{\mathbf{p}}(E^n), f_2 \in L_{\mathbf{p}'}(E^n)$ Тогда функция $f_1(x)f_2(x)$ интегрируема по E^n

и имеет место неравенство

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| dx \leq \|f\|_{\mathbf{p}} \, \|f\|_{\mathbf{p}'}. \tag{1.5}$$

Определение 1.2.3. Неравенство Минковского. Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, $f_i \in L_{\mathbf{p}}(E^n) \quad (i = 1, \ldots, m)$. Тогда $\{f_1 + \ldots + f_m\} \in L_{\mathbf{p}}(E^n)$ и

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_{\mathbf{p}} \leq \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\mathbf{p}}. \tag{1.7}$$

Определение 1.2.5. Неравенство Юнга. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ такие, что

$$\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \infty, \qquad \mathbf{1} - \frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mathbf{r}}.$$

$$\mathfrak{I}(x) = \int\limits_{E^n} f(y) \; K(y - x) \; dy.$$

Тогда

$$\|\mathfrak{I}\|_{\mathbf{q}} \leq \|K\|_{\mathbf{r}} \|f\|_{\mathbf{p}}. \tag{1.9}$$

Определение 1.2.6. Неравенство Харди – Литтлвуда. Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \mathbf{q} <$ $< \infty$, $\lambda_i > 0$, $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}\right)$, $\rho(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{\lambda_i}}$,

$$\mathfrak{I}(x) = \int\limits_{E^n} f(y) [\rho(y - x)]^{-\mu} dy,$$

где $f \in L_{\mathbf{p}}(E^n)$, Тогда

$$\|\mathfrak{I}\|_{\mathbf{q}} \leq C \|f\|_{\mathbf{p}}. \tag{1.10}$$

где C – константа, не зависящая от f.

Рассмотрим процесс усреднения функции f, приводящий к последовательности бесконечно дифференцируемых функций, стремящихся к f.

Определение 2.1.1. Пусть $K(x)$ - бесконечно дифференцируемая, финитная в E^n $(K \in C_0^\infty(E^n))$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{E^n} K(x)dx = 1. \tag{2.1}$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, $v > 0$. Функция

$$K_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|}K(x : v^\lambda) \tag{2.2}$$

бесконечно дифференцируема на E^n, ее носителем является множество $S_{v^\lambda}(K) \subset I_{v^\lambda}$, где

$$S_{v^\lambda}(K) = \left\{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\right\},$$

и в силу (2.1)

$$\int\limits_{E^n} K_{v^\lambda}(x)dx = \int\limits_{E^n} v^{-|\lambda|}K(x : v^\lambda)dx = \int\limits_{E^n} K(x)dx = 1. \tag{2.3}$$

Предложение 2.1.3. Определим среднюю функцию для функции f с ядром усреднения K и параметром усреднения v^λ по формуле

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|}\int\limits_{E^n} f(x+y)K(y : v^\lambda)dy =$$

$$= v^{-|\lambda|}\int\limits_{E^n} f(y)(K((y-x) : v^\lambda))dy. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1.4. Если $f \in L_{\mathbf{p}}(G)$ $(\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n))$, то

$$\|f_{v^\lambda}\|_{\mathbf{p}} \leq \|K\|_{\mathbf{1}}\|f\|_{\mathbf{p}} \qquad (\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty), \tag{2.6}$$

$$\lim_{v\to 0}\|f_{v^\lambda} - f\|_{\mathbf{p}} = 0 \qquad (\mathbf{1} \leq \mathbf{p} < \infty). \tag{2.7}$$

Лемма 2.1.8. Множество $C_0^\infty(G)$ плотно в $L_{\mathbf{p}}(G)$, если $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} < \infty$.

Определение 2.2.1. Пусть функции f и χ локально суммируемы на открытом множестве $G \subset E^n$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ выполняется равенство

$$\int\limits_G \chi(x)\ \varphi(x)dx = (-1)^{|k|} \int\limits_G f(x)\ \varphi^{(k)}(x)dx, \tag{2.10}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ $\quad (k_i \geq 0$ - целые), то χ называется обобщенной производной функции f вида $f^{(k)} = D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1}, \ldots, \partial x_n^{k_n}}$ в G.

Лемма 2.2.6. Пусть в области G заданы функция $f \in L_{\mathbf{p}}^{loc}(G)$, последовательность функций $f_j \in L_{\mathbf{p}}^{loc}(G) \quad (j = 1, \ldots)$, имеющих обобщенные производные $f_j^{(k)} \in L_{\mathbf{q}}^{loc}(G)$ $(j = 1, \ldots)$, где $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} \leq \infty$.
Если $(f_j \to f) \quad (j \to \infty)$ в смысле $L_{\mathbf{p}}^{loc}(G)$ и $(f_j^{(k)} - f_i^{(k)}) \to 0$ $(i, j \to \infty)$ в смысле $L_{\mathbf{q}}^{loc}(G)$, то функция f имеет на G обобщенную производную $f^{(k)} \in L_{\mathbf{q}}^{loc}(G)$ и $f_j^{(k)} \to f^{(k)} \quad (j \to \infty)$ в смысле $L_{\mathbf{q}}^{loc}(G)$.

Для заданной локально суммируемой функции f построим ее среднюю функцию $f_{v^\lambda}(x) = f(x, v)$ с ядром Ω и параметром v^λ, где λ– фиксированный вектор.

На основании формулы Ньютона-Лейбница при любых ϵ и h, $0 < \epsilon < h$, справедливо равенство

$$f_{\epsilon^\lambda}(x) = f_{h^\lambda}(x) - \int\limits_\epsilon^h \frac{\partial}{\partial v} f_{v^\lambda}(x) dv. \tag{2.13}$$

Пусть $K(x) \in C_0^\infty(E^n)$. $K(x)$ удовлетворяет определению 2.1.1.

По заданной функции $K(x)$ построим функцию $\Omega(x)$, которая обладает всеми свойствами функции $K(x)$, а так же некоторыми новыми. Положим

$$\Omega(x) = D_x^k \left[\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \int\limits_{E^n} K(z)\theta(x-z)dz \right], \tag{2.14}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, k_i – достаточно больние натуральные числа.

$$\theta(x) = \prod_{j=1}^n \theta(x_j),$$

$\theta(x_j)$ – функция Хевисайда, т.е. $\theta(t) = 1$ при $t > 0$, $\theta(t) = 0$ при $t < 0$.

Рассмотрим усреднение функции f, приняв за ядро усреднения функцию $\Omega(x)$, а за параметр усреднения v^λ.

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int\limits_{E^n} f(x+y)\Omega(y : v^\lambda) dy, \tag{2.22}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $v > 0$.

В связи с использованием интегрального представления функций в теоремах вложения возникают условия на геометрию области определения функций. Данные условия называются условиями l-рога.

Определение 2.4.1. Пусть $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – вектор с положительными компонентами, $0 < h \leq \infty$, $\epsilon > 0$, $a_i \neq$ $(i = 1, \ldots, n)$. Множество

$$\begin{aligned} V(l) = V(l,h) = \\ = \bigcup_{0<v<h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, v < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{l_i} < (1+\epsilon)v \ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

назовем l –рогом радиуса h и раствора ϵ.

Определение 2.4.2. Пусть для открытого множества $G \subset E^n$ существует конечное число K открытых множеств G_k и l-рогов $V_k(l) = V_k(l,h)$ вида (2.27) с коэффициентами a_i, зависящими от k, так что при этом

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} (G_k + V_k(l,h)). \tag{2.28}$$

Будем говорить в таком случае, что открытое множество G удовлетворяет слабому условию l-рога, и писать $G \in \underline{A}(l,h)$.

Определение 2.4.3. Будем говорить, что открытое множество G удовлетворяет условию l-рога, и писать $G \in A(l,h)$, если для G выполнено условие (2.28) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{(\delta)} \qquad \text{при некотором } \delta > 0, \tag{2.29}$$

где

$$G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_k, \rho(x,\ \partial G_k \setminus \partial G) > \delta\}.$$

Определение 2.4.4. Будем говорить, что открытое множество G удовлетворяет сильному условию l-рога, и писать $G \in \overline{A}(l,h)$, если для G выполнено условие (2.28) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{[\delta]} \qquad \text{при некотором } \delta > 0, \tag{2.30}$$

где

$$G_k^{[\delta]} = \{x : x \in G_k, \rho(x, G_k \backslash G) > \delta\}.$$

Определение 3.1.1. Пусть G - открытое множество n-мерного евклидового пространства E^n, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$. Обозначим через $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)$ пространство локально суммеруемых на G функций f, имеющих на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)} = \|f\|_{\mathbf{p},G} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p},G} = \|f\|_{\mathbf{p},G} + \|f\|_{L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1.2. Пространство $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)$, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, является полным нормированным пространством, т.е пространством Банаха.

Теорема 3.1.3. Пространство $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)$, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, сепарабельно.

Определение 3.1.4. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n)$ - вектор с натуральными компонентами, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, G - область евклидова пространства E^n, $\square$ - открытый n-мерный куб с ребрами, параллельными координатным осям, $\overline{\square} \subset G$. Обозначим через $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G, \square)$ пространство локально суммируемых на G функций, имеющих на G обобщенные производные $D_i^l f \quad (i = 1, \ldots, n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G,\square)} = \|f\|_{\mathbf{p},\square} + \sum_{1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p},G} = \|f\|_{\mathbf{p},\square} + \|f\|_{L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G)}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1.5. Пространство $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G, \square)$ является полным.

Теорема 3.1.6. Пространство $W_{\mathbf{p}}^{\mathbf{l}}(G, \square)$, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \infty$, сепарабельно.

Лемма 3.1.7. При $|\alpha : l| < 1$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$ и при $|\alpha : l| = 1$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$ имеет место неравенство

$$\left\|D^\alpha \overline{f}\right\|_{\mathbf{p},E^n} \leq Ch^{1-|\,\alpha\,:\,l|} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{\mathbf{p},U+V} + Ch^{-|\,\alpha\,:\,l|} \left\|f\right\|_{\mathbf{p},U+V}, \tag{3.7}$$

где C не зависит от f и h.

Теорема 3.1.8. Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l-рога. Тогда при $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, $|\alpha : l| < 1$ и при $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$, $|\alpha : l| = 1$ имеет место вложение $D^\alpha W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}}(G)$ и для $f \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$

$$\begin{aligned} \left\|D^\alpha f\right\|_{\mathbf{p},G} \leq Ch^{1-|\alpha\,:\,l|} \sum_{i=1}^{n} \left\|D_i^{l_i} f\right\|_{\mathbf{p},G} + Ch^{-|\alpha\,:\,l|} \left\|f\right\|_{\mathbf{p},G} \leq \\ \leq C(h) \left\|f\right\|_{W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где при некотором $h_0 = h_0(G) > 0$, $0 < h < h_0$, C не зависит от f и h.

Теорема 3.1.10. Пусть открытое множество G удовлетворяет сильному условию l-рога, $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$. Тогда пространство $W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$ совпадает с сужением пространства $W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(E^n)$ на G. При этом существует линейно ограниченный оператор распостранения функций из $W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$ в $W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(E^n)$

$$W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G) \ni f \to \overline{f} \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(E_n), \qquad \overline{f}|_G = f. \tag{3.11}$$

Пусть E и F – два нормированных функциональных пространства. Говорят, что E вложено в F, и писать $E \hookrightarrow F$, если все элементы E содержатся в F и существует не зависящая от f постоянная C такая, что

$$\|f\|_F \leq C\|f\|_E, \qquad \forall f \in E.$$

Основным показателем в формулировке теорем вложения будет величина

$$\varkappa = \left|\left(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right) : l\right|,$$

имеющая простую геометрическую интерпретацию. Условие $\varkappa = 1$ означает, что точка $\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}$ в n-мерном пространстве находится на гиперплоскости, проходящей через n точек $(l_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, l_n)$. При $\varkappa \leq 1$ величина $\varkappa - 1$ пропорциональна расстоянию от точки $\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}$ до гиперплоскости.

Лемма 4.0.1. Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \infty, \varkappa = |(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}) : l| \leq 1$ и при $\varkappa = 1$ либо $\mathbf{1} < \mathbf{p} = \mathbf{q} < \infty$, либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$.

Тогда $D^\alpha W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(U+V) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}}(U)$ и для $f \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(U+V)$

$$\|D^\alpha f\|_{\mathbf{q},U} \leq C_1 h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p},U+V} + C_2 h^{-\varkappa} \|f\|_{\mathbf{p},U+V} . \tag{4.1}$$

При чем C_1 и C_2 не зависят от f и h, а C_2 не зависит также от q. В левой части (4.1) $D^\alpha f$ можно заменить на $D^\alpha f_\epsilon$ при любом $\epsilon \in (0, h]$.

При $\varkappa < 1$

$$C_1 = C_1' \left(\frac{1}{1-\varkappa} \right)^{1 - \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}} \left(\frac{1}{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где C_1' не зависит от q.

Теорема 4.1.1. Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l-рога, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \infty, \varkappa = |(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}) : l| \leq 1$ и при $\varkappa = 1$ либо $\mathbf{1} < \mathbf{p} = \mathbf{q} < \infty$, либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$.

Тогда $D^\alpha W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}}$; точнее говоря, для $f \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$ существует на G обобщенная производная $D^\alpha f \in L_{\mathbf{q}}(G)$ и существует числа $h_0 > 0, C > 0$ такие, что

$$\|D^\alpha f\|_{\mathbf{q},G} \leq C h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p},G} + C h^{-\varkappa} \|f\|_{\mathbf{p},G} , \tag{4.8}$$

где постоянная C не зависит от f и $h \in (0, h_0)$. В частности, при $\alpha = 0 \quad W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}}(G)$.

Теорема 4.2.1. Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l-рога, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty, \varkappa = |(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}}) : l| \leq 1$ либо $\varkappa = 1, \quad p_n = 1$.

Тогда $D^\alpha W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G) \hookrightarrow C(G)$, точнее говоря, для $f \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$ производная $D^\alpha f$ непрерывна в G и

$$\sup_G |D^\alpha f| \leq Ch^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p},G} + Ch^{\varkappa} \left\| f \right\|_{\mathbf{p},G}. \tag{4.9}$$

где $0 < h < h_0$ и постоянная С не зависит от f и h.

Теорема 4.3.1. Пусть G удовлетворяет слабому условию l-рога, $f \in W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, причем $1 < p_n < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(0 \leq \alpha_i$ – целые$)$,

$$|(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}}) : l| = 1.$$

Тогда на G существует обобщенная производная $D^\alpha f$ и при любом $\overline{\mathbf{q}}$, $\overline{\mathbf{p}} \leq \overline{\mathbf{q}} \leq \overline{\infty}$, $D^\alpha f \in L_{(\overline{\mathbf{q}},\Phi)}(G)$ (в частности, $D^\alpha f \in L_{(\overline{\infty},\Phi)}(G)$), т.е

$$\int\limits_{\Pi_n G} \Phi \left(\| D^\alpha f(\cdot, x_n) \|_{\overline{\mathbf{q}}, G|_{x_n}} \right) dx_n < A, \tag{4.11}$$

где

$$\Phi(t) = e^{\mu |t|^{p_n'}} - \sum_{0 \leq k < p_n - 1} \frac{1}{k!} \left(\mu |t|^{p_n'} \right)^k \qquad \left(p_n' = \frac{p_n}{p_n - 1} \right),$$

постоянная

$$\mu < \left[e \left(C^* \| f \|_{W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)} \right)^{p_n'} \right]^{-1},$$

C^* - постоянная, не зависящая от f, а A - константа, зависящая от $\| f \|_{W^{\mathbf{l}}_{\mathbf{p}}(G)}$.

Заключение. В данной работе были изложены понятия связанные с пространством $L_{\mathbf{p}}$, приведены основные интегральные неравенства. Рассмотрены различные интегральные представления дифференцируемых функций. Изучены анизотропные пространства Соболева и их свойства. Рассмотрены теоремы вложения пространств Соболева в различные пространства функций.