МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение
Высшего Профессионального Образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Гармонические функции

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления: 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
Механико-математического факультета
Кулагиной Лилии Мавлетовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________________________ Осипцев М.А.

Заведующий кафедрой
и.о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н. ________________________ Захаров А.М.

Саратов 2023

Введение. Исследование стационарных процессов различной физической природы обычно приводят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Регулярные решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями. Уравнение Лапласа и гармонические функции играют весьма важную роль в математической физике. Например, потенциал элементарного поля в области, свободной от зарядов, и скалярный потенциал стационарного магнитного поля в областях, свободных от электрических токов, являются гармоническими функциями. В гидродинамике потенциал скоростей и функции тока безвихревых, плоских течений несжимаемой идеальной жидкости в определенных областях также являются гармоническими функциями. Связь между аналитическими и гармоническими функциями используется в физических приложениях аналитических функций. При истолковании условия Коши-Римана и уяснения смысла аналитических функций часто используется понятие гармонической функции. Нам известно, что если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

В работе рассматривается гармонические функции и их связь с аналитическими функциями, а также решение задачи Дирихле для круга и смежные вопросы.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование гармонических функций, их общих свойств, решение уравнения Лапласа для различных областей исследования интеграла Дирихле и близких вопросов.

Основными методами исследования являются методы теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики и теории функций.

Данная работа состоит из двух глав. Первая глава посвящена определениям гармонических функций, их свойствам, в частности теореме о среднем, которая является характеристическим свойством гармонических функций, что будет доказано в разделе 1.9. Проводится параллель между классами аналитических и гармонических функций. Так же в первой главе рассматривается задача Дирихле, выводится формула Пуассона, которая впоследствии используется для решения задачи Дирихле, приводятся примеры решения этой задачи. Во второй главе рассматривается интеграл Дирихле, его свойства, а так же минимальное свойство,названное Риманом принципом Дирихле. Во второй главе приводится пример Адамара, который показывает, что в принципе Дирихле требование конечности интеграла Дирихле является существенным. Работа носит в основном реферативный характер.

Основное содержание работы. Остановимся более подробно на основных результатах работы.

Определение 1. *Действительная функция $u(x, y)$ называется гармонической в области D, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

В полярных координатах (r, φ) уравнение (1) записывается в виде

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{2}$$

Определение 2. *Две гармонические в области функции, связанные равенствами*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

называются сопряженными гармоническими функциями. Данные равенства называют условиями Коши - Римана

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была аналитической в области, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были сопряженными гармоническими функциями в этой области.*

Возникает вопрос:

Каждую ли гармоническую в области функцию $u(x,)$ можно рассматривать как действительную (или мнимую) часть некоторой аналитической в области функции?

Ответ на этот вопрос положителен и дается следующей леммой.

Лемма 1. *Для любой гармонической в области D функции $u(x, y)$ существует сопряженная ей в D гармоническая функция $v(x, y)$.*

Сформулируем некоторые теоремы о свойствах гармонических функций.

Теорема 2. *(Теорема о среднем.) Пусть функция $f(z)$ аналитическая в круге $K : |z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$. Тогда значение этой функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности, т.е.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Данная теорема легко переносится на случай гармонических функций.

Теорема 3. *(Теорема о среднем для гармонических функций.)*

Пусть функция $u(z) = u(x, y), z = x + iy$ гармоническая в круге $K : |z - z_0| < R$, непрерывна к круге $\overline{K}$. Тогда

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_{0+Re^{i\varphi}}) d\varphi. \tag{3}$$

Теорема 4. *(Принцип максимума.)*

Пусть функция $\varphi(x, y) \neq const$ действительная, непрерывна в области D и выполнено в каждой точке D

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_\gamma \varphi(z) ds; \ \gamma : |z - z_0| = r \tag{4}$$

тогда функция не может принимать наибольшее значение в области D.

Следствием этого принципа является следующая теорема.

Теорема 5. *(Принцип минимума и максимума для гармонических функций.)*

Пусть функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной области D, непрерывна вплоть до границы этой области и $u(x, y) \neq const$. Тогда максимум и минимум этой функции достигается только на границе области D.

Интеграл Пуассона аналогичен интегралу Коши, распространенному на окружность, и может быть получен некоторыми преобразованиями из интеграла Коши.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ аналитическая функция в области $D = |z - z_0| < p$. Тогда верна формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{p^2 - r^2}{p^2 + r^2 - 2rp\cos(\alpha - \theta)} d\alpha, \tag{5}$$

которая носит название формулы Пуассона.

При помощи формулы Пуассона мы установим возможность разложения гармонической функции в ряд Фурье или Тейлора в окрестности произвольной точки области гармоничности.

Теорема 6. *(О разложении гармонической функции в ряд Фурье.)*
Пусть $u(z)$ гармоническая в области D функция. Тогда

$$u(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{6}$$

где a_n и $b_n(1, 2, ...)$ определяются формулами Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta,$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Ряд (6) сходится абсолютно при $|z| = r < R$ и равномерно при $|z| = r \leq R_1 < R$.

Выше приведенные результаты, доказанные в предположении $z_0 = 0$, сохраняют силу для любой точки z из области гармоничности функций $u(z)$. Сформулируем несколько теорем.

Здесь R выбирается таким образом, чтобы круг $|z - z_0| \leq R$ содержался в D, $|z - z_0| = r^{e\varphi}$, $\xi - z_0 = R^{e\theta}$ причем в формулах $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} d\theta$. следует заменить $u(Re^{i\theta})$ на $u(\xi)$.

Теорема 7. *Гармоническая функция $u(z) = u(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора*

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k,\ l} (x - x_0)^k (y - y_0)^l \tag{7}$$

в окрестности любой точки (x_0, y_0) ее области гармоничности, причем этот ряд сходится абсолютно по крайней мере в области

$$|x - x_0| + |y + y_0| < R,\ (R > 0).$$

Следствие 7.1. *Гармоническая функция аналитична относительно действительных переменных x и y.*

Следствие 7.2. *Гармоническая функция имеет частные производные любого порядка.*

Частные производные гармонической функции по x и y также являются гармоническими функциями.

Так как можно изменить порядок дифференцирования, то

$$\Delta \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Delta u = 0,$$

при любых целых неотрицательных p и q.

Если положить $z = re^{i\varphi}$ и записать уравнение Лапласа в полярных координатах, то можно заключить, что $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ является гармонической, а $\frac{\partial u}{\partial r}$ - нет. Но заметим, что функция $\frac{r\partial u}{\partial r}$ гармонична.

Так же как интегральная формула Коши, формула Пуассона используется для установления теоремы о равномерно сходящихся рядах гармонических функций, аналогичной теореме Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

Теорема 8. *Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ - ряд функций, гармонических в области D, сходящийся равномерно внутри этой области. Тогда:*

1. *сумма этого ряда $u(z)$ является гармонической функцией в области D;*
2. *ряд можно дифференцировать почленно, причем сумма ряда из производных также гармонична в D;*
3. *ряд из производных любого порядка сходится равномерно внутри области D.*

Теорема 9. *Функция $u(z)$, гармоническая и ограниченная снизу (или сверху) на всей конечной плоскости z, является постоянной.*

Из следующей теоремы мы получим расширенное определение гармоничности.

Теорема 10. *Функция $u(z)$ гармонична в области D, если она*

1. *непрерывна в D,*
2. *имеет в D частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,*
3. *удовлетворяет в уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.*

Определение 3. *Пусть B - произвольная область комплексной плоскости, а $\varphi(x, y)$ - произвольная действительная функция, непрерывно дифференцируема во внутренних точках этой области. Величину*

$$D[\varphi] = D_B[\varphi] = \iint_B ((\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2)\ dx\ dy, \tag{8}$$

будем называть интегралом Дирихле от функции $\varphi(z)$ по области B.

Входящий в формулу (8) является несобственным. Мы будем понимать его как верхнюю грань интегралов, распространенных на любую конечную замкнутую область, лежащую в области B.

В полярных координатах интеграл Дирихле принимает вид

$$D_B[\varphi] = \iint_B (\varphi_r'^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\theta'^2)\ r\ dr\ d\theta \tag{9}$$

Интеграл Дирихле обладает свойством инвариантности относительно конформных отображений, т.е. верно следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть функция $\omega = f(z)$ конформно отображает область B на область B^* и пусть $\varphi(x) = \psi(f(z))$. Тогда*

$$\iint_B (\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2) dx\ dy = \iint_B (\psi_u'^2 + \psi_v'^2) du\ dv \tag{10}$$

где $z = x + iy,\ \omega = u + iv$.

Сформулируем его свойства.

Пусть Ω - произвольная область и F - класс функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в Ω.

1. $D(F) \geq 0$, причем $D(F) = 0$ только если $F(z)$ постоянна в Ω.

   Если $D = 0$, то из непрерывности $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ следует, что они равны нулю в Ω, и поэтому $F(z)$ постоянна.

2. Если $D(F_1)$ и $D(F_2)$ конечны для функций F_1 и F_2, принадлежащих классу $\{F\}$, то интеграл $D(\lambda F_1 + \mu F_2)$ конечен при любых действительных λ и μ и

   $$D(\lambda F_1 + \mu F_2) = \lambda^2 D(F_1) + 2\lambda\mu D(F_1, F_2) + \mu^2 D(F_2), \tag{11}$$

   где

   $$D(F_1, F_2) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} \right)\ dx\ dy. \tag{12}$$

   $D(\lambda F_1 + \mu F_2) \geq 0$, поэтому применяя к выражению (3) свойство неотрицательных квадратичных форм, получаем

$$D^2(F_1, F_2) \le D(F_1)D(F_2).$$

Следовательно, интеграл $D(F_1, F_2)$ конечен и, согласно соотношению (3), $D(\lambda F_1 + \mu F_2)$ обладает тем же свойством.

3. Интеграл Дирихле является конформным инвариантом.

   При помощи функции $z^* = \Phi(z)$ отобразим конформно область Ω на область Ω^* и обозначим $F^*(z^*) = F[\Phi^{-1}(z^*)]$. Тогда

$$D_\Omega(F) = D_{\Omega^*}(F^*).$$

4. В полярных координатах r и φ интеграл Дирихле имеет вид

$$D_\Omega(F) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 \right] r\, dr\, d\varphi. \tag{13}$$

Нам понадобится формула для интеграла Дирихле, называемая формулой Грина:

$$D[\varphi, \psi] = -\iint_B \varphi\ \Delta\psi dx\ xdy + \int_{\partial B} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \tag{14}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ дифференцирование по направлению внешней нормали к границе области D.

Формула Грина справедлива в предположении, что функция $\varphi(z)$ непрерывно дифференцируема в замыкании области B. Область B при этом предполагается уже не произвольной, а конечно - связной областью, ограниченной конечным числом простых замкнутых кусочно гладких кривых.

Теорема 12. *Пусть функция $u(z)$ гармонична внутри области B, и пусть $D_B[u] \le M$. Тогда имеет место неравенство*

$$u_x'^2(z) + u_y'^2(z) \le \frac{M}{\pi\delta^2},$$

где δ - расстояние от точки z до границы области B.

Следствие 12.1. *Если последовательность гармонических, внутри области B функций $u_n(z)$ обладает тем свойством , что*

$$D_B[u_n] \to 0,\ n \to \infty,$$

и если эта последовательность сходится хотя бы в одной точке z_0 области B, то она равномерно сходится к некоторой постоянной в любой замкнутой части области .

Теорема 13. *Если* $\overline{D}$ *- замкнутая жорданова область, ограниченная простой замкнутой* C*,* $f(\xi)$ *- непрерывная функция на* C *и* $\{F\}$ *- семейство функций* $F(z)$*, непрерывных в* $\overline{D}$*. принимающих на* C *значения* $f(\xi)$ *и непрерывно дифференцируемых в* D*, то гармоническая функция* $u(z)$ *из семейства* $\{F\}$*, которая существует и определена однозначно, придает интегралу Дирихле*

$$D(F) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy,$$

минимальное значение. Среди всех функций семейства $\{F\}$ *с конечным интегралом Дирихле* $u(z)$ *является единственной, для которой* $D(F)$ *принимает минимальное значение.*

Адамар показал, что случай, когда $D(F) = \infty$ может иметь место.

Зададим на окружности $|z| = 1$ функцию

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^4 \theta}{k^2}, \tag{15}$$

которая непрерывна на окружности, так как ряд 15 сходится абсолютно и равномерно.

В этом случае гармоническая функция семейства $\{F\}$ имеет вид

$$u(z) = Re \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^4}}{k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{k^4} \cos k^4 \varphi}{k^2}, \tag{16}$$

где $z = re^{i\varphi}$. Интеграл Дирихле в полярных координатах (13) при $|z| \leq r < 1$ имеет вид

$$D_{|z| \leq r}(u) = \int_0^{2\pi} r \, dr \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi,$$

и так как из 16 вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k^4} \cos k^4 \varphi,$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k^4 - 1} \sin k^4 \varphi$$

то учитывая соотношения

$$\int_0^{2\pi} \cos h\varphi \cos k\varphi \; d\varphi = \pi\delta_h^k$$
$$\int_0^{2\pi} \sin h\varphi \cos k\varphi \; d\varphi = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \sin h\varphi \sin k\varphi \; d\varphi = \pi\delta_h^k$$

получим

$$D_{|z|\leq r}(u) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k^4}. \tag{17}$$

Так как сумма ряда 17 стремится к бесконечности при $r \to 1$, то $D(u) = \infty$, а, следовательно, согласно теореме 13 $D(F)$ для любой $F \in \{F\}$.

Заключение. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Изучены определения гармонических функций и их свойства.

2. Проведена параллель между классами аналитических и гармонических функций.

3. Рассмотрена задача Дирихле.

4. Выведена формула Пуассона, которая впоследствии используется для решения задачи Дирихле.

5. Изучено расширенное определение гармоничности.

6. Рассмотрен интеграл Дирихле и его свойства, а так же принцип Дирихле и пример Адамара.

7. Решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

8. были решены задачи Дирихле для многосвязных областей в системе на языке Wolfram Mathematica.

Для выполнения поставленных задач был исследован теоретический материал, восстановлены необходимые доказательства.