МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Звездные отображения порядка α в задачах Холла и Хеле-Шоу

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Махамаева Аюба Султановича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент Е.В. Разумовская

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н. А.М. Захаров

Саратов 2023

Введение. Геометрическая теория функций комплексного переменного изучает аналитические функции, определяемые каким-либо геометрическим свойством, а также различные геометрические свойства тех или иных классов аналитических функций. Одним из центральных объектов изучения геометрической теории функций комплексного переменного является класс $\mathcal{S}$ нормированных однолистных в единичном круге функций.

Целью бакалаврской работы является исследование звездных функций порядка α.

Задачи бакалаврской работы:

- Рассмотреть основные свойства звездных и выпуклых функций порядка α;
- Исследовать задачу Холла для классов $\mathcal{S}^*\alpha$ и $\mathcal{C}(\alpha)$;
- Исследовать роль звездных и сильно-звездных областей в задаче Хеле-Шоу.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка литературы.

Первый раздел посвящен изучению длины образа луча при отображении функциями из определенных геометрических подклассов класса $\mathcal{S}$. Основное внимание уделяется классу звездных функций порядка α. Эта задача интересует специалистов давно, и для многих подклассов $\mathcal{S}$ остается нерешенной. Для класса $\mathcal{S}^*(\alpha)$ задача была решена недавно, в 2020 году, тем самым подтвердив гипотезу, сформулированную Холлом. В первом разделе мы приведем доказательство гипотезы Холла, а также исследуем эту задачу для другого подкласса $\mathcal{S}$ – класса выпуклых функций порядка α.

Во втором разделе рассматриваются звездообразные области в задаче Хеле- Шоу. Одним из давних вопросов вопросов в этой области является время существования решений в звездной динамике в ячейке Хеле-Шоу. Мы рассмотрим эволюцию областей в случае, когда начальная область является сильно-звездной порядка α. Основной в данном разделе является теорема, которая утверждает, что в случае звездообразной начальной области, время существования решения бесконечно.

Для построения графиков функций был использован язык Python, библиотека matplotlib.

Основное содержание работы. Введем необходимые определения.

Определение 1.1.1. Область называется звездообразной относительно некоторой точки, если отрезок, соединяющий любую ее точку с указанной точкой, целиком принадлежит этой области.

Определение 1.1.2. Обозначим через $\mathcal{S}$ класс всех однолистных функций в единичном круге $\{z : |z| < 1\}$, таких, что $f(0) = f'(0) - 1 = 1$. Через $\mathcal{P}$ – класс функций из $\mathcal{S}$, таких, что $\operatorname{Re} f(z) > 0$.

Определение 1.1.3. Регулярная в круге функция называется звездной, если она однолистна в этом круге и отображает его на область, звездообразную относительно начала координат. Через $\mathcal{S}^*$ обозначается подкласс, состоящий из всех звездных функций, содержащихся в $\mathcal{S}$

Теорема 1.1.4. Пусть f регулярна в $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$, и $f'(0) = 1$. В таком случае $f \in \mathcal{S}^*$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}.$$

Введем теперь понятие обобщенной α - звездности.

Определение 1.1.5. Функция f называется звездной функцией порядка $\alpha \in [0, 1)$, если она регулярна и однолистна при $|z| < 1$ и

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad \text{при всех } z \in \{z : |z| < 1\}.$$

Класс функций, звездных порядка α и нормированных $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ обозначается $\mathcal{S}^*(\alpha)$.

Будем исследовать длину образа луча под воздействием специального класса функций. Положим $f \in \mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ и f отображает $\mathbb{D}$ на область E. Пусть $C(r, \theta)$ это образ в E луча , соединяющего $z = 0$ и $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ при отображении функцией $w = f(z)$, принадлежащей семейству $\mathcal{F}$. Тогда длину $l(r, \theta)$ кривой $C(r, \theta)$ можно записать как

$$l(r, \theta) := \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho.$$

В 1963 Геринг и Хейман, что если $f \in \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$, т.е $f(\mathbb{D})$ звездообразно по отношению к началу координат, то существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$l(r, \theta) \leqslant M|f(re^{i\theta})| \tag{1.1}$$

для всех $r < 1$ и θ. Холл доказал, что оптимальные значения константы M для классов $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$ равны 2 и $\frac{\pi}{2}$ соответственно.

Возникает естественная задача нахождения точной константы в неравенстве (1.1) для других подклассов $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$.

В 1980 году Холл сформулировал гипотезу, что оптимальное значение константы для класса $\mathcal{S}^*(\alpha)$ равно $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}$.

В бакалаврской работе мы исследуем доказательство этой гипотезы.

Теорема 1.1.7. Пусть $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$, т.е. f - звездная функция порядка α на единичном диске $\mathbb{D}$. Тогда

$$|f(re^{i\theta})|^{-1}\ell(r, \theta) \leqslant \beta(\alpha) \tag{1.2}$$

для любого $r < 1$ и θ, где $\ell(r, \theta) := \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho$ и

$$\beta(\alpha) := \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}. \tag{1.3}$$

Кроме того, постоянна $\beta(\alpha)$ оптимальна.

График функции $\beta(\alpha)$ приведен на Рисунке 1.2.

Экстремальной функцией в этой задаче для класса $\mathcal{S}^*(\alpha)$ является функция $k_\alpha(z) = z/(1-z)^{2-2\alpha}$. Посчитаем производную:

$$k'_\alpha(z) = \frac{1 + (1-2\alpha)z}{(1-z)^{3-2\alpha}} \quad \text{и} \quad \frac{zk'_\alpha(z)}{k_\alpha(z)} = \alpha + (1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}.$$

Из этого мы видим, что $k_\alpha \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

Вычислим теперь следующий предел:

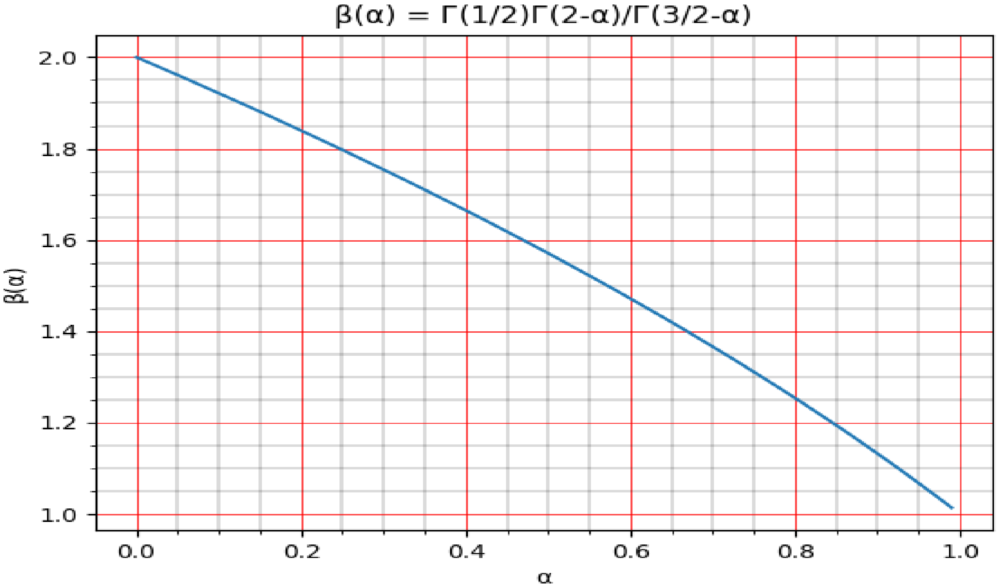

Рисунок 1.2 — График функции $\beta(\alpha)$

$$\lim_{\theta\to 0}\lim_{r\to 1}\frac{\ell(r,\theta)}{|k_\alpha(re^{i\theta})|}=(1-\alpha)\int_0^\infty w^{-\alpha}(1+w)^{\alpha-\frac{3}{2}}dw=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}.$$

Из этого мы видим, что $\beta(\alpha)$, данное в (1.3), не может быть заменено на меньшее, следовательно является оптимальным.

Естественно возникает аналогичная задача определения оптимальной константы и для других известных подклассов класса $\mathcal{S}$. Для начала рассмотрим эту задачу для следующего класса выпуклых функций:

Определение 1.3.1. Множество $G\subset\mathbb{C}$ называется выпуклым, если отрезок соединяющий любые две точки из G целиком лежит в G, т.е $tz_1+(1-t)z_2\in G$, где $z_1,z_2\in G$ и $t\in[0,1]$.

Определение 1.3.2. Функция f, аналитичная в $\mathbb{D}$ и нормированная $f(0)=f'(0)-1=0$, называется выпуклой в $\mathbb{D}$ если $f(\mathbb{D})$- выпуклое множество. Класс выпуклых функций обозначим $\mathcal{C}$.

Обозначим искомую константу за γ. Напомним также известный критерий выпуклости функций:

Теорема 1.3.3. Пусть f аналитична в $\mathbb{D}$ и нормирована $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Тогда, $f \in \mathcal{C}$ в том и только в том случае, когда $1 + zf''(z)/f'(z) \in \mathcal{P}$, т.е.,

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Вспомним теорему, которая связывает классы $\mathcal{C}$ и $S^*(1/2)$:

Теорема 1.3.4. Если $f \in \mathcal{C}$, то $f \in S^*(1/2)$.

Итак, оценка сверху для класса $\mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$ применима и для класса $\mathcal{C}$, т.е., $\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$. Здесь стоит напомнить, что функция из класса $\mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$ может не быть выпуклой в круге $|z| < R$ для любого $R > \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0.68$. Однако, легко проверяется, что экстремальная для $\mathcal{S}^*(\frac{1}{2})$ функция $k_{\frac{1}{2}} := \frac{z}{1-z}$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. То есть является экстремальной в классе $\mathcal{C}$. Получаем, что $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Теперь рассмотрим задачу нахождения оптимальной константы для следующего обобщения класса $\mathcal{C}$:

Определение 1.3.5. Функция f называется выпуклой функцией порядка $\alpha \in [0, 1)$, если она регулярна и однолистна при $|z| < 1$ и

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad \text{при всех } z \in \{z : |z| < 1\}.$$

Класс функций, выпуклых порядка α и нормированных $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ будем обозначать $\mathcal{C}^*(\alpha)$

Оптимальную константу для класса $\mathcal{C}(\alpha)$ обозначим за $\gamma(\alpha)$. Попробуем получить оценку сверху для $\gamma(\alpha)$ используя идею вложения. Действительно, для класса $\mathcal{C}(\alpha)$ имеется вложение в класс $\mathcal{S}(c)$ для некоторого c .

Теорема 1.3.6. Если $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, то $f \in \mathcal{S}^*(c)$, где

$$c = c(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2\alpha}{2^{2(1-\alpha)} - 2} & \text{если } \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\log 2} & \text{если } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.23}$$

Используя этот факт и Теорему 1.1.7 можно получить следующую оценку на $\gamma(\alpha)$:

Предложение 1.3.7. Пусть $f \in \mathcal{C}(\alpha)$. Тогда

$$\frac{l(r,\theta)}{|f(re^{i\theta})|} \leqslant \beta(c(\alpha)) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2-c(\alpha))}{\Gamma(\frac{3}{2}-c(\alpha))},$$

где $c(\alpha)$ дано в Теореме 1.3.6.

В качестве кандидата на экстремальную функцию в классе $\mathcal{C}(\alpha)$ можно рассмотреть следующую функцию, которая является экстремальной для многих задач в этом классе:

$$K_\alpha(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\alpha}((1-z)^{2\alpha-1}-1), & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ -\log 1-z, & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Действительно, $K_\alpha(0) = 0$, $K'_\alpha(0) = 1$ и $1 + \frac{zK''_\alpha(z)}{K'_\alpha(z)} = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$ - отображает $\mathbb{D}$ однолистно на полуплоскость $\operatorname{Re} w > \alpha$, следовательно $K_\alpha \in \mathcal{C}(\alpha)$.

Теперь попробуем найти значения коэффициента $\frac{l(r,\theta)}{|f(re^{i\theta})|}$ для функций K_α при некоторых значениях r и θ.

Предложение 1.3.8.

$$m(\alpha) := \lim_{\theta\to 0}\lim_{r\to 1}\frac{\ell(r,\theta)}{|K_\alpha(re^{i\theta})|} = \frac{1-2\alpha}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим течение вязкой жидкости в плоской ячейке Хеле-Шоу при закачке через единственный источник, который расположен в начале координат. Пусть в начальный момент фазовая область Ω_0, занятая жидкостью, односвязна и ограничена гладкой аналитической кривой Γ_0. Эволюция фазовых областей $\Omega(t)$, $\Omega(0) = \Omega_0$, описывается вспомогательным конформным отображением $f(\zeta,t)$, $f(\zeta,0) = f_0(\zeta)$, единичного диска $U = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на $\Omega(t)$, $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$, нормированного условиями $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) > 0$. Обозначим производные $f' = \partial f/\partial\zeta$, $\dot{f} = \partial f/\partial t$, t - параметр времени. Это отображение удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{Re}\left[\dot{f}(\zeta,t)\overline{\zeta f'(\zeta,t)}\right] = 1, \quad \zeta = e^{i\theta}, \tag{2.1}$$

при соответствующем масштабировании. Л. А. Галин и П. Я. Полубаринова-Кочина , первыми получили уравнение (2.1), что повлекло глубокие исследования комплексно-переменного подхода к задачам со свободной границей. Под классическим решением на интервале $t \in [0, T)$ уравнения (2.1) мы имеем ввиду отображение $f(\zeta, t)$, конформное и однолистное как функция от ζ в окрестности замыкания $\bar{U}$ единичного диска U и C^1 по переменной $t \in [0, T)$.

Одной из основных особенностей решения уравнения (2.1) является то, что, начиная с аналитической границы Γ_0, мы получаем однопараметрическую (t) систему классических решений $f(\zeta, t)$, которые существуют в течение периода $t \in [0, T)$, развивая возможные каспы или двойные точки на границе $\Gamma(t)$, $\Gamma(0) = \Gamma_0$ в момент времени разрыва T. Известно, что классическое решение существует и локально единственно по времени. Недавно стало ясно, что эту модель можно интерпретировать как частный случай абстрактной задачи Коши; таким образом, классическая разрешимость (локально по времени) может быть доказана с помощью нелинейной абстрактной теоремы Коши-Ковалевской. Отметим, что в нашем случае задача корректна по Адамару.

Задача оценки времени разрыва T имеет первостепенное значение. Один из "фольклорных"вопросов - время жизни звездообразной динамики в ячейке Хеле-Шоу. Большинство исследователей считают, что это время бесконечно в случае звездообразной исходной области, тогда как некоторые из них так не считают.

Напомним, что S^* мы обозначаем класс звездных функций, т.е. функций f, аналитических в $\mathbb{D}$, $f(0) = f' - 1 = 0$, которые отображают $\mathbb{D}$ на звездообразное относительно начало координат множество.

Класс $\mathcal{S}^*$ является объединением классов $\mathcal{S}^{**}(\alpha)$ так называемых сильнозвездных функций порядка α, $0 < \alpha \leq 1$. Функция $f : U \to \mathbb{C}, f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ принадлежит классу $\mathcal{S}^{**}(\alpha)$ если для всех $\zeta \in U$,

$$\left|\arg \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| < \alpha \frac{\pi}{2}. \tag{2.2}$$

Этот класс характеризуется следующим образом. Всякая линия уровня $f(re^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $f \in S^{**}(\alpha)$ достижима снаружи радиальным углом

$\pi(1-\alpha)$. Образы единичного круга функциями из $\mathcal{S}^{**}(\alpha)$ будем также называть сильно-звездообразными порядка α. Ясно, что $S^* = \mathcal{S}^{**}(1)$.

Сформулируем основную теорему:

Теорема 2.1.1. Пусть $f_0 \in \mathcal{S}^{**}(\alpha)$, $\alpha \in (0,1]$, аналитична и однолистна в окрестности $\bar{U}$. Тогда классическое решение $f(\zeta,t)$ уравнения Полубариновой- Галина (2.1) образует цепочку подчинений сильно-звездных функций порядка $\alpha(t)$ со строго убывающим $\alpha(t)$ в течении времени существования.

Приведем доказательство следующего факта: если классическое решение (2.1) существует в течении интервала времени $[0,T)$, то предельная функция $\lim\limits_{t\to T-0} f(\zeta,t) \equiv f(\zeta,T)$ аналитична в некоторой окрестности единичного диска U. Здесь предел берется относительно равномерной сходимости на компактах единичного круга U. Этот предел существует по теореме Каратеодори о ядре поскольку $f(\zeta,t)$ - это цепь подчинений. После этого будет приведен главный результат о бесконечном времени существования решений.

Лемма 2.2.1. Пусть классическое решение (2.1) существует в течение временного интервала $[0,T)$, $0<T<\infty$, $\Omega(t)=f(U,t)$, и пусть начальная отображающая функция $f(\zeta,0)$ аналитична и однолистна в окрестности замыкания единичного диска U. Тогда существует $\eta>0$ такое, что $f(\zeta,t)$ аналитична в $U_{1+\eta}=\{\zeta:|\zeta|<1+\eta\}$ при всех $t\in[0,T]$, однолистна в U, и возможно $f(\zeta,T)$ имеет нулевую производную в некоторых точках единичной окружности ∂U или не однолистна на ∂U. Из этого следует, что $\Omega(T)\equiv f(U,T)$ — односвязная область с аналитической границей $\Gamma(T)=\partial\Omega(T)$ с возможными аналитическими особенностями в виде конечного числа каспов и двойных точек.

Лемма 2.2.2. Пусть $f_0 \in S^*$ аналитична и однолистна в окрестности замыкания $\bar{U}$ единичного диска U. Если решение $f(\zeta,t)$ уравнения Полубариновой-Галина (2.1) существует в течение интервала времени $[0,T)$, то оно образует цепь подчинения звездных функций, и предельная область $\Omega(T)$ имеет гладкую аналитическую границу.

Лемма 2.2.3. Пусть $f(\zeta, t)$ классическое решение уравнения (2.1), которое существует в течение временного интервала $[0, T)$ со звездным начальным отображением f_0 как в Лемме 2.2.2. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что классическое решение существует в течение временного интервала $[0, T + \varepsilon)$.

Теорема 2.2.4. Пусть начальная фазовая область Ω_0 является звездообразной и имеет аналитическую границу. Тогда время существования классического решения $\Omega(t)$ бесконечно.

Доказательство. Действительно, если классическое решение существует на конечном интервале $t \in [0, T)$ и не существует на $t \in [T, T + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, то мы получаем противоречие с Леммой 2.2.3. □

Заключение. В бакалаврской работе были рассмотрены важные подклассы класса однолистных нормированных функций. Было изучено доказательство гипотезы Холла. В первом разделе также были получены некоторые оценки в аналогичной задаче для другого подкласса $\mathcal{S}$ – класса выпуклых функций порядка α.

Во втором разделе была рассмотрено уравнение Полубариновой-Галина для потока жидкости в ячейке Хеле-Шоу. Звездообразные области в задаче Хеле- Шоу. Также была изучена эволюция фазовых областей в случае, когда начальная область является сильно-звездной порядка. Для случая, когда начальная фазовая область является звездообразной, было приведено доказательство того, что время существования решения бесконечно