МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция на тетраэдре

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направления ***01.04.02 – Прикладная математика и информатика***

механико-математического факультета

Веселова Андрея Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Ю. В. Матвеева
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и. о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н.		А. М. Захаров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2023

Введение В настоящее время стремительно развиваются информационные технологии, в которых приходится иметь дело с аппроксимирующими функциями и вычислением интерполяционных данных. В связи с этим в теории приближений разрабатываются новые инструменты для решения как теоретических, так и практических задач. Одним из них являются сплайны.

Термин "сплайн" впервые употребил американский математик Исаак Шенберг в 1946 году. До 1960-х годов сплайны использовали для теоретических исследований, например, для решения экстремальных и вариационных задач в теории приближений. После 1960 года, с развитием вычислительной техники, методы теории сплайнов стали использоваться в системах автоматизированного проектирования, обработке и кодировании сигналов.

В работе рассмотрены интерполяционные сплайны первой степени одной и двух переменных и получены оценки погрешности на различных классах функций.

В вычислительной геометрии одной из базовых задач является задача построения триангуляции. Она широко используется в компьютерной графике и геоинформационных системах для моделирования поверхностей и решения пространственных задач. Также к ней сводятся многие другие задачи.

В работе рассмотрены триангуляции плоских областей, описаны алгоритмы построения жадной триангуляции, триангуляции Делоне и триангуляции, полученной в результате применения метода измельчения.

Современные системы тесно связаны с обработкой огромного количества информации. Нередко возникает задача аппроксимации большого объема слабоструктурированных данных. Поскольку эти данные являются выборочными и регулярная сетка аргументов отсутствует, то использование классических схем приближений невозможно.

В работе предложена схема вычисления аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных на нерегулярной сетке на основе экспериментальных данных, в которой регуляризация сетки выполнена методом триангуляции Делоне с последующей кусочно-линейной интерполяцией и сглаживанием по методу обратных взвешенных расстояний.

При увеличении размерности пространства $\mathbb{R}^n$ триангуляция будет рассматриваться в виде совокупности n-мерных симплексов (n-мерное обобщение треугольника), не имеющих общих внутренних точек. При $n = 2$ симплексы являются треугольниками, а при $n = 3$ – тетраэдрами.

В работе рассмотрена линейная интерполяция на тетраэдре и получены оценки аппроксимации производных.

Цель магистерской работы заключалась в исследовании линейных сплайнов на отрезке, триангуляций плоских областей, линейной интерполяции на треугольных сетках; разработке десктопного приложения для построения триангуляций плоских областей; реализации алгоритма аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных на основе экспериментальных данных на нерегулярной сетке.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- рассмотреть интерполяционные сплайны первой степени одной и двух переменных;
- оценить погрешность аппроксимации функций одной и двух переменных с помощью сплайнов на различных классах функций;
- рассмотреть интерполяцию с заданной точностью для функций одной переменной, алгоритмы построения оптимальных сеток и привести численные примеры;
- ввести основные определения для построения триангуляций плоских областей;
- рассмотреть алгоритмы построения жадной триангуляции, триангуляции Делоне и триангуляции, полученной в результате применения метода измельчения;
- разработать десктопное приложение для построения изученных триангуляций;
- рассмотреть аппроксимацию вещественнозначной функции двух переменных на основе экспериментальных данных на нерегулярной сетке;
- реализовать вычисление аппроксимирующих функций на треугольных сетках, удовлетворяющих условию Делоне, и построение интерполяции в приложении;
- рассмотреть линейную интерполяцию на тетраэдре и оценить погрешность аппроксимации производных.

Для практической части было разработано десктопное приложение, написанное на языке C# 10 (.net6). Для 3D-визуализации графиков использована программа Gnuplot 5.4 (patchlevel 6). Описание реализации и функционала приведено в работе в параграфах: 3.4 и 4.2. Листинг представлен в приложении А.

Основное содержание работы Работа состоит из пяти глав.

Первая глава посвящена сплайнам первой степени одной переменной.

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, на которой будем рассматривать сплайны $S_{1,1}(f; x)$ первой степени дефекта 1. В дальнейшем для краткости не будем указывать дефект сплайна, подразумевая, что он равен 1.

Определение 6. Пусть в узлах сетки Δ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$, некоторой функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Интерполяционным сплайном первой степени называется сплайн $S_1(f; x) \equiv S_1(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$S_1(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим алгоритм построения $S_1(x)$. Обозначим через $h_i = x_{i+1} - x_i$, тогда при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ уравнение сплайна имеет вид

$$S_1(x) = f_i \, \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \, \frac{x - x_i}{h_i}. \tag{1.2}$$

Подставив $x_{i+1} = x_i + h_i$ в (1.2), получим

$$S_1(x) = f_i + \frac{x - x_i}{h_i} \, (f_{i+1} - f_i).$$

Качество приближения функций, в том числе и интерполяции, характеризуется остаточным членом. Обозначим его через $R(x) = S_1(x) - f(x)$. Оценка остаточного члена зависит от того, какими дифференциальными свойствами обладает интерполируемая функция $f(x)$. Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. Если сплайн первой степени $S_1(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ на сетке Δ, то справедливы оценки

$$\left\| \, R^{(r)}(x) \, \right\|_\infty = \left\| \, S_1^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \, \right\|_\infty \leqslant R_r, \quad r = 0, 1. \tag{1.3}$$

Оценки погрешности интерполяции R_r на различных классах функций приведены в таблице 1.1. В работе представлено доказательство теоремы и показано, что полученные оценки являются точными.

На практике обычно требуется осуществить интерполяцию с некоторой заданной точностью. Эта задача решается путем выбора сетки на отрезке $[a, b]$ с учетом свойств интерполируемой функции и соответствующих оценок погрешности интерполяции.

Точность интерполяции определяется в основном гладкостью функции внутри промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Поэтому прежде всего следует позаботиться о том, чтобы точки, в которых функция имеет особенности, например, разрывы производных, были включены в число узлов интерполяции.

В работе рассмотрены два алгоритма, в реализации которых используется априорная информация о функции $|\, f''(x)\,|$ для построения сетки с меньшим числом узлов, чем при равномерном разбиении; и приведены численные примеры.

Вторая глава посвящена сплайнам первой степени двух переменных.

Пусть в области $\Omega = [a, b]\times[c, d]$ определена некоторая сетка $\Delta = \Delta_x\times\Delta_y$, где $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$, на которой будем рассматривать сплайны $S_{1,1,1,1}(f; x, y)$ первой степени дефекта 1 по x и по y. В дальнейшем для краткости не будем указывать дефект сплайна, подразумевая, что он равен 1.

Определение 7. Пусть в узлах сетки $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ заданы значения $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ некоторой функции $f(x, y)$, определенной в области Ω. Интерполяционным сплайном первой степени называется сплайн $S_{1,1}(f; x, y) \equiv\ S_{1,1}(x, y)$, удовлетворяющий условиям:

$$S_{1,1}(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, M}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим алгоритм построения $S_{1,1}(x, y)$. Так как при фиксированном значении одной из переменных $S_{1,1}(x, y)$ является сплайном первой степени относительно другой переменной, то, используя формулу (1.2), получим

$$S_{1,1}(x, y_q) = (1 - t)f_{i,q} + tf_{i+1,q}, \quad q = j, j + 1, \tag{2.2}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$.

Интерполируя найденные значения $S_{1,1}(x, y_j)$ и $S_{1,1}(x, y_{j+1})$, имеем

$$S_{1,1}(x, y) = (1 - u)S_{1,1}(x, y_j) + uS_{1,1}(x, y_{j+1}), \tag{2.3}$$

где $l_j = y_{j+1} - y_j$, $u = \dfrac{y - y_j}{l_j}$.

Используя формулы (2.2) и (2.3), получим

$$S_{1,1}(x, y) = (1 - u)\left[(1 - t)f_{ij} + tf_{i+1,j}\right] + u\left[(1 - t)f_{i,j+1} + tf_{i+1,j+1}\right]. \tag{2.4}$$

Вычисление сплайна в точке (x, y) удобнее проводить в следующем порядке: сначала находим h_i, l_j, t, u; вычисляем $A = f_{ij} + t(f_{i+1,j} - f_{ij})$, $B = f_{i,j+1} + t(f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1})$; затем $S_{1,1}(x, y) = A + u(B - A)$.

В работе рассмотрены оценки погрешности интерполяции на различных классах функций.

Третья глава посвящена триангуляциям плоских областей.

Метод триангуляции широко применяется в различных вычислительных задачах. Это связано с тем, что треугольники являются простейшими плоскими фигурами, геометрические характеристики которых достаточно легко вычисляются. Введем основные определения.

Определение 8. Триангуляцией (англ. triangulation) называется планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками. Соответствующие элементы триангуляции обычно называют узлами (англ. node), ребрами (англ. rib) и треугольниками (англ. triangle).

Однако, эта терминология не общепринята. Достаточно часто узлы называют точками (англ. point) или вершинами (англ. vertex), ребра – дугами (англ. arc), а треугольники – гранями (англ. side, facet).

В дальнейшем будем использовать следующую терминологию: узлы (node), ребра (edge), треугольники (triangle).

Определение 9. Выпуклой триангуляцией называется такая триангуляция, для которой минимальный многоугольник, охватывающий все треугольники, будет выпуклым. В противном случае триангуляция называется невыпуклой.

Определение 10. Триангуляция называется оптимальной, если сумма длин всех рёбер минимальна среди всех возможных триангуляций, построенных на тех же исходных точках.

Задачей построения триангуляции по заданному набору двумерных точек называется задача соединения заданных точек непересекающимися отрезками так, чтобы образовалась триангуляция.

Определение 11. Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Триангуляцией данного набора точек называется совокупность невырожденных треугольников $\{T_j\}_{j=1}^{M}$, удовлетворяющих условиям:

1. любая точка P_i является вершиной хотя бы одного треугольника T_j;
2. каждый треугольник T_j содержит только три точки из данного набора, являющиеся вершинами этого треугольника.

Для большинства реальных задач существующие алгоритмы построения оптимальной триангуляции неприемлемы ввиду слишком высокой трудоёмкости. При необходимости на практике применяют приближённые алгоритмы. Одним из первых был предложен жадный алгоритм.

Определение 12. Триангуляция называется жадной, если она построена жадным алгоритмом.

В работе рассмотрен жадный алгоритм построения триангуляции.

В практической части решена следующая задача. Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Используя жадный алгоритм, требуется построить триангуляцию по этому набору точек.

Кроме оптимальной и жадной триангуляций, также широко известна триангуляция Делоне.

Определение 13. Говорят, что триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутрь окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции.

Определение 14. Триангуляция называется триангуляцией Делоне, если она является выпуклой и удовлетворяет условию Делоне.

Одной из важнейших операций, выполняемых при построении триангуляции, является проверка условия Делоне для заданных пар треугольников.

Определение 15. Говорят, что пара соседних треугольников триангуляции удовлетворяет условию Делоне, если этому условию удовлетворяет триангуляция, составленная только из этих двух треугольников.

В настоящее время известно значительное количество различных алгоритмов построения триангуляции Делоне. В работе рассмотрен представленный Л. Дж. Гибасом и Ж. Столфи алгоритм слияния "Разделяй и властвуй" , который вычисляет триангуляцию Делоне для выпуклой оболочки множества точек. Выполнение алгоритма продемонстрировано в примере 3.

В практической части решена следующая задача. Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Используя алгоритм слияния "разделяй и властвуй" , требуется построить триангуляцию Делоне по этому набору точек.

Сформулируем задачу построения триангуляции методом измельчения. Пусть дана некоторая триангуляция, удовлетворяющая условию Делоне, и задан коэффициент измельчения (обозначим его через q). Требуется построить триангуляцию методом измельчения с заданным коэффициентом.

В качестве исходной триангуляции будем использовать триангуляцию Делоне, построенную по конечному набору точек $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и состоящую из совокупности невырожденных треугольников $T = \{T_j\}_{j=1}^{M}$.

Алгоритм измельчения заключается в следующем: для каждого треугольника T_j исходной триангуляции выполняем разбиение на q^2 равных подобных треугольников. В работе более подробно рассмотрен данный алгоритм.

Используя алгоритмы, описанные в третьей главе, построим триангуляции плоских областей. Для этой задачи было разработано десктопное приложение. В параграфе 3.4 приведено описание его реализации и функционала и рассмотрены примеры.

Четвертая глава посвящена аппроксимации функций двух переменных на нерегулярной сетке.

Рассмотрим задачу аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных $z = f(x, y)$ по экспериментальным данным, которые представляют собой набор значений $\{z_i\}_{i=1}^{N}$ в случайно разбросанных по области определения точках (x_i, y_i), $i = \overline{1, N}$. Экспериментальные данные обозначим через

$$A = \left\{ XY, Z:\ XY = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N},\ Z = \{z_i\}_{i=1}^{N} \right\}. \tag{4.1}$$

Требуется найти такую функцию $G(A, x, y)$, которая в некотором заданном смысле соответствовала бы неизвестной функции $f(x, y)$ и могла быть использована в расчетах вместо нее.

В работе предложена схема вычисления аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных на основе экспериментальных данных на нерегулярной сетке. В основе метода лежит регуляризация сетки методом триангуляции Делоне с последующей кусочно-линейной интерполяцией и сглаживанием по методу обратных взвешенных расстояний (англ. Inverse Distance Weighting, IDW).

При увеличении объема экспериментальных данных будет возрастать точность аппроксимации. Также отметим, что особенностью данного алгоритма является возможность без дополнительных модификаций проводить экстраполяцию данных.

В практической части был реализован алгоритм приближения. Для 3D-визуализации графиков использована программа Gnuplot. В параграфе 4.2 описана реализация, приведено несколько численных примеров аппроксимации функций и проиллюстрированы полученные результаты.

Пятая глава посвящена линейной интерполяции на тетраэдре.

Рассмотрим линейную интерполяцию функций, имеющих непрерывные и ограниченные заданной константой частные производные второго порядка, на тетраэдре.

Пусть $\bar{T} = (A_i)_{i=1}^{4}$ – тетраэдр с вершинами A_i, $i = \overline{1, 4}$; f – функция, определенная на $\bar{T}$ и непрерывная вместе с любыми своими производными до второго порядка включительно.

Пусть равномерная норма любой производной второго порядка по направлениям произвольных единичных векторов ξ_1, ξ_2 на $\bar{T}$ ограничена сверху неотрицательной константой M (соответствующий класс функций обозначим через $W(M)$).

Обозначим через $P = P[f]$ многочлен первой степени (по совокупности переменных), интерполирующий значения функции f в вершинах тетраэдра $\bar{T}$:

$$f(A_i) = P(A_i), \quad i = \overline{1,4}.$$

Сформулируем задачу интерполяции на тетраэдре. Пусть задан некоторый тетраэдр $\bar{T} = (A_i)_{i=1}^4$ с вершинами A_i, $i = \overline{1,4}$. Функция f определена на $\bar{T}$ и непрерывна вместе с любыми своими производными до второго порядка включительно.

Требуется построить полином $P = P[f]$ первой степени, который в вершинах A_i ($i = \overline{1,4}$) тетраэдра $\bar{T}$ интерполирует функцию f:

$$f(A_i) = P(A_i), \quad i = \overline{1,4}.$$

Рассмотрим теорему, позволяющую оценить сверху аппроксимацию производных функции f производными линейного интерполянта P в терминах величин R и φ.

Теорема 8. Для любой функции $f \in W(M)$ и любого единичного вектора ξ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \right\| \lesssim \frac{MR}{\sin(\varphi)}\,. \tag{5.2}$$

Доказательство теоремы приведено в работе.

Существует множество работ, посвященных оценкам сверху величин аппроксимации производных в терминах различных характеристик симплексов. В общем случае проблема точности остается открытой.

Заключение Цель работы заключалась в исследовании линейных сплайнов на отрезке, триангуляций плоских областей, линейной интерполяции на треугольных сетках; разработке десктопного приложения для построения триангуляций плоских областей; реализации алгоритма аппроксимации вещественнозначной функции двух переменных на основе экспериментальных данных на нерегулярной сетке.

Таким образом, все поставленные во введении задачи были выполнены в полном объеме и цель работы успешно достигнута.