МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ И УПРАВЛЕНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Шафеевой Адили Жамилевны

Научный руководитель:
доцент, к. ф.-м. н. ______________ Е. П. Станкевич

Заведующий кафедрой:
к. ф.-м. н., доцент ______________ И. Е. Тананко

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В настоящее время развитие распределённых вычислительных систем, телекоммуникационных сетей и производственных линий сопровождается усложнением не только архитектуры, но и алгоритмов обработки заявок (требований). Классические модели сетей массового обслуживания (СеМО), такие как открытые и замкнутые сети Джексона, хорошо изучены и успешно применяются для анализа систем с одиночными переходами требований и непрерывным временем. Однако в реальных приложениях — например, при пакетной передаче данных, групповой обработке транзакций, параллельных вычислениях или управлении роботизированными линиями — зачастую происходит одновременное перемещение не одного, а целого множества требований между системами. Кроме того, требования могут менять свой класс, а маршрутизация может зависеть от текущего состояния сети.

Ключевой особенностью современных сетей является необходимость дискретизации времени (слоты), когда обслуживание и передача требований синхронизируются управляющими сигналами. Это приводит к моделям с дискретным временем и групповыми переходами требований, где в конце одного слота из системы может выходить несколько требований, которые затем распределяются по другим системам. Прямое решение уравнений глобального баланса становится вычислительно сложным уже при небольшом числе систем и требований.

Особую практическую значимость приобретают задачи управления маршрутизацией групп требований и блокировок переходов, позволяющие удерживать сеть в желаемой области состояний, предотвращать перегрузку отдельных систем и перераспределять нагрузку. Такие механизмы особенно важны в замкнутых сетях, где общее число требований фиксировано, а неправильное распределение может привести к образованию очередей и падению производительности.

Цель бакалаврской работы — исследование замкнутой сети массового обслуживания с групповыми переходами требований и управлением.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Изучение литературы, посвященной сетям массового обслуживания с групповыми переходами.
2. Изучение методов анализа сетей массового обслуживания с групповыми

переходами.

3. Изучение методов управления в сетях массового обслуживания с групповыми переходами и методов их анализа.
4. Разработка алгоритмов и программы для анализа сетей массового обслуживания с групповыми переходами и управлением.
5. Проведение вычислительных экспериментов, демонстрирующих эффективность методов управления.

Методологические основы исследования систем массового обслуживания с групповыми переходами требований и управлением представлены в работах Ю. И. Митрофанова, Е. С Рогачко, Е. П Станкевич, H. Daduna, W. Henderson.

Теоретическая и/или практическая значимость бакалаврской работы. Представленные в работе результаты и разработанная программа могут быть использованы для математического моделирования и оптимизации распределённых вычислительных систем, телекоммуникационных сетей, производственных линий и роботизированных комплексов, функционирующих в режиме групповой обработки объектов. Разработанная программа с графическим интерфейсом позволяет исследовать влияние блокировок переходов на распределение нагрузки между системами сети, подбирать оптимальные ограничения для предотвращения перегрузок и повышения эффективности функционирования сети.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 60 страниц, из них 46 страниц — основное содержание, включая 9 рисунков, список использованных источников информации — 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Сети массового обслуживания без управления» посвящён описанию сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований без управления.

В подразделе 1.1 рассматривается замкнутая стохастическая сеть массового обслуживания $\hat{N}$ с L системами и K классами требований. В сети циркулирует фиксированное общее число требований $\hat{H}$. Время разбито на слоты единичной длины, и в конце каждого слота поступают управляющие сигналы согласно которым обслуженные в системах требования выходят из них [1]. Длительность обслуживания требования класса k, $k = 1, \dots, K$, в системе i, $i = 1, \dots, L$, имеет геометрическое распределение с параметром μ_{ik}. По окончании слота выходящие требования направляются в другие системы согласно маршрутной матрице Θ, которая допускает смену класса требования. Эволюция сети описывается цепью Маркова. Введён вектор состояния сети $s = (s_{ik})$, где s_{ik} — число требований класса k, $k = 1, \dots, K$, в системе S_i, $i = 1, \dots, L$. Описан механизм формирования векторов уходящих требований $d = (d_{ik})$ и входящих требований $a = (a_{jl})$, а также правило перехода в новое состояние $s' = s - d + a$ [2]. Представлены результаты, касающиеся маршрутной цепи Маркова $\hat{\alpha}$, её разложения на эргодические подцепи и стационарного распределения, зависящего от вектора относительных интенсивностей ω_i, $i = 1, \dots, L$.

В подразделе 1.2 приведен метод анализа сети с групповыми переходами требований.

В подразделе 1.3 рассмотрен частный случай однородной сети (один класс требований, $K = 1$). Для этого случая приведены упрощённые выражения для стационарного распределения [3], а также для среднего числа требований $\bar{s}_i$, $i = 1, \dots, L$, в системе S_i и интенсивности входящего потока λ_i. Показано, что все результаты, полученные для неоднородных сетей, остаются справедливыми для систем с одним классом требований.

В подразделе 1.4 описан метод анализа средних (метод MVA) для сетей с групповыми переходами требований.

Второй раздел «Сети обслуживания с блокировками переходов требований» посвящён исследованию замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и управлением, реализуемым посредством блокировок переходов.

В разделе приведено описание сети N^B с блокировками переходов требований. Вводится механизм управления, при котором задаются ограничения $M = (M_i)$, $i = 1, \dots, L$ на максимально допустимое число требований в каждой системе обслуживания S_i [4]. Если в результате переходов групп требований формируется состояние s, для которого хотя бы в одной системе выполняется условие $s_i > M_i$, то переход сети блокируется. В этом случае ни одна из групп требований, готовых к выходу, не перемещается, а все требования остаются в тех системах, где они находились, и начинают обслуживаться заново. Описан алгоритм перехода сети N^B из состояния s в состояние s' с использованием вектора оставшихся требований $b = (b_i)$, вектора уходящих требований $d = (d_i)$ и вектора поступающих требований $a = (a_i)$, причём $s = b + d$, $s' = b + a$. Вероятность такого перехода обозначена $p_{da,b}$.

Далее вводятся важные структурные понятия для анализа сетей с блокировками. Локальное множество состояний X_b определяется как подмножество состояний X для фиксированного вектора b. На множестве X_b определена цепь Маркова $\hat{\eta}_b$ с вероятностями перехода $p_{da,b}$. Неприводимые подмножества $X_{b,m}$, $m = 1, \dots, h_b$, называются локальными подмножествами состояний. Отмечается, что одно и то же состояние s может принадлежать разным локальным множествам, что обеспечивает возможность переходов между ними. Показано, что для многих классов сетей обслуживания вероятности перехода могут быть представлены в виде произведения двух функций:

$$p_{da,b} = u_{d,b+d} v_{da,b},$$

где $u(\cdot)$ отображает характеристики обслуживания, а $v(\cdot)$ — характеристики маршрутизации и блокировки [5].

Рассматривается метод получения стационарного распределения для сети с блокировками. Предполагается, что для любого фиксированного b, для которого $X_b \neq \emptyset$, система уравнений имеет единственное положительное решение $\{y_{d,b}\}$ с точностью до постоянного множителя. На основе этого решения строится строго обратимая цепь $\hat{y}$ с вероятностями перехода $w_{da,b}$, удовлетворяющими соотношению детального баланса.

Теорема [6]. Для сети N^B с блокировками стационарные вероятности состояния имеют вид

$$\pi_s = \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \mathbf{1}(s_i \leq M_i) \Bigg/ \sum_{\substack{s: s \in X \\ \text{и } s \leq M}} \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i}, \quad s \in X,$$

где $\mathbf{1}(s_i \leq M_i) = 1$, если $s_i \leq M_i$, в остальных случаях $\mathbf{1}(s_i \leq M_i) = 0$.

Третий раздел «Программа для анализа сети обслуживания с групповыми переходами и блокировками» посвящён описанию алгоритма и программы для численного анализа замкнутых сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований и блокировками.

В подразделе 3.1 «Алгоритм программы анализа сети обслуживания с групповыми переходами и блокировками» приведено описание алгоритма, который включает следующие основные этапы, каждый из которых был реализован автором самостоятельно:

1. Инициализация и задание параметров сети. Разработан модуль ввода и проверки исходных данных: числа систем L, общего числа требований H, вектора интенсивностей обслуживания $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_L)$, маршрутной матрицы $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, L$, и вектора ограничений $M = (M_1, \ldots, M_L)$. Реализована автоматическая проверка корректности вводимых данных (стохастичность строк матрицы Θ, непротиворечивость ограничений $\sum_{i=1}^{L} M_i \geq H$, соответствие размерностей).
2. Решение системы уравнений потоков. Вычисление $\omega = (\omega_i)$, $i = 1, \ldots, L$ как решения системы

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{L} \omega_i \theta_{ij}, j = 1, \ldots, L,$$

с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{L} \omega_i = 1.$$

Реализована обработка вырожденных случаев с использованием поиска собственного вектора, соответствующего собственному значению 1.
3. Генерация пространства состояний. Генерируются все допустимые векторы состояний $s = (s_1, \ldots, s_L)$, удовлетворяющие условиям $\sum_{i=1}^{L} s_i = H$ и $0 \leq s_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, L$. Алгоритм учитывает ограничения блокировок на этапе генерации, что позволяет существенно сократить перебор для сетей с жёсткими ограничениями.
4. Вычисление стационарного распределения. Реализован расчёт ненормированных вероятностей

$$\hat{\pi}_s = \prod_{i=1}^{L} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!\, \mu_i^{s_i}} \cdot \mathbf{1}(s_i \leq M_i),$$

вычисление нормализующей константы

$$G = \sum_{s \in X} \hat{\pi}_s,$$

и получение стационарных вероятностей

$$\pi_s = \hat{\pi}_s / G.$$

5. Расчёт стационарных характеристик. Математическое ожидание числа требований в каждой системе j, $j = 1, \ldots, L$,

$$\bar{s}_j = \sum_{k=0}^{H} k \sum_{s : s_j = k} \pi_s,$$

интенсивности входящего потока

$$\lambda_j = \sum_{s \in X} s_j \mu_j \pi_s.$$

В подразделе 3.2 «Интерфейс программы анализа сети обслуживания с групповыми переходами» представлена разработанная студентом графическая оболочка программы. Интерфейс реализован на языке Python с использованием библиотек tkinter и matplotlib.

Особое внимание уделено удобству взаимодействия пользователя с программой: после успешного расчёта программа автоматически переключается на вкладку с результатами; все элементы интерфейса адаптируются при изменении размеров окна; реализована подробная система подсказок и уведомлений.

В подразделе 3.3 «Численные примеры» приведены результаты вычислительных экспериментов, проведённых с использованием разработанной программы. Проанализированы следующие сети:

Сеть с топологией звезды $L = 6$, $H = 20$, $\mu = (0.4, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2)$,

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.15 & 0.20 & 0.15 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показано, что без управления среднее число требований в системах распределено неравномерно $\overline{s} = (5.825, 1.942, 3.495, 2.330, 3.495, 2.913)$. Подобраны ограничения $M = (4, 5, 4, 5, 3, 4)$, позволяющие выровнять нагрузку на сеть $\overline{s} = (3.67, 3.348, 3.417, 3.679, 2.602, 3.284)$.

Сеть с кольцевой топологией $L = 7$, $H = 20$,
$\mu = (0.1, 0.3, 0.3, 0.2, 0.3, 0.1, 0.2)$, и

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.8 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.35 & 0.0 & 0.65 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.45 & 0.0 & 0.55 \\ 0.65 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.35 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

Без управления среднее число требований в системах распределено неравномерно $\overline{s} = (8.127, 1.943, 0.981, 2.54, 1.446, 2.298, 2.664)$. Подобраны ограничения $M = (3, 3, 20, 3, 3, 4, 3)$, при которых среднее число требований в перегруженных системах снижается, а в остальных — увеличивается, что приводит к более равномерной загрузке сети
$\overline{s} = (2.904, 2.578, 3.231, 2.681, 2.426, 3.486, 2.696)$.

Сеть с произвольной топологией $L = 8$, $H = 20$,
$\mu = (0.4, 0.3, 0.1, 0.2, 0.5, 0.4, 0.2, 0.3)$ и

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.08 & 0.12 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.15 \\ 0.06 & 0 & 0.04 & 0.10 & 0.30 & 0.18 & 0.22 & 0.10 \\ 0.07 & 0.09 & 0 & 0.05 & 0.14 & 0.33 & 0.11 & 0.21 \\ 0.10 & 0.07 & 0.12 & 0 & 0.06 & 0.09 & 0.35 & 0.21 \\ 0.04 & 0.28 & 0.06 & 0.11 & 0 & 0.13 & 0.16 & 0.22 \\ 0.13 & 0.05 & 0.27 & 0.09 & 0.10 & 0 & 0.19 & 0.17 \\ 0.19 & 0.10 & 0.08 & 0.24 & 0.12 & 0.07 & 0 & 0.20 \\ 0.15 & 0.22 & 0.07 & 0.05 & 0.18 & 0.13 & 0.20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислены средние значения $\bar{s}$ и интенсивности λ для различных векторов M: без ограничений $M = (20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20)$:

$$\bar{s} = (1.2581, 1.891, 4.5817, 2.5616, 1.2883, 1.606, 4.2855, 2.5279),$$

$$\lambda = (0.5032, 0.5673, 0.4582, 0.5123, 0.6441, 0.6424, 0.8571, 0.7584),$$

с ограничениями $M = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$:

$$\bar{s} = (1.2597, 1.8934, 4.5714, 2.5648, 1.29, 1.608, 4.2818, 2.531),$$

$$\lambda = (0.5039, 0.568, 0.4571, 0.513, 0.645, 0.6432, 0.8564, 0.7593),$$

с ограничениями $M = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)$:

$$\bar{s} = (1.4749, 2.1587, 3.7968, 2.7633, 1.5093, 1.8613, 3.6994, 2.7364),$$

$$\lambda = (0.59, 0.6476, 0.3797, 0.5527, 0.7546, 0.7445, 0.7399, 0.8209),$$

и с ограничениями $M = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$:

$$\bar{s} = (1.7145, 2.3302, 3.3397, 2.7566, 1.7492, 2.0816, 3.2886, 2.7395),$$

$$\lambda = (0.6858, 0.6991, 0.334, 0.5513, 0.8746, 0.8327, 0.6877, 0.8218).$$

Дополнительно проведён эксперимент с выборочным ограничением перегруженных систем 3 и 7: при $M = (20, 20, 3, 20, 20, 20, 3, 20)$

$$\bar{s} = (1.6978, 2.5519, 2.5055, 3.4569, 1.7386, 2.1673, 2.4707, 3.4114),$$

$$\lambda = (0.6791, 0.7656, 0.2506, 0.6914, 0.8693, 0.8669, 0.4941, 1.0234).$$

среднее число требований в этих системах резко сокращается, а в остальных — возрастает, что подтверждает эффективность механизма блокировок как инструмента управления нагрузкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе описан метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований и блокировками.

Рассмотрена сеть с блокировками переходов требований, когда при превышении заданных ограничений на число требований в системах переходы групп блокируются, а требования возвращаются в исходные системы.

Разработан алгоритм и реализована программа на Python с графическим интерфейсом, с генерацией пространства состояний, вычисление стационарного распределения и расчёт средних характеристик сети обслуживания с групповыми переходами и блокировками. Проведён численный пример. Результаты показали, что уменьшение максимально допустимого числа требований в системе с низкой интенсивностью обслуживания приводит к перераспределению нагрузки в пользу более производительных систем, что подтверждает эффективность механизма блокировок.

Основные источники информации:

1. Митрофанов, Ю. И. Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований / Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич //Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011.– Т.11, Вып.3, Ч.1. – С. 41 – 46.

2. Daduna, H. Queueing Networks with Discrete Time Scale / H. Daduna // Verlag Berlin Heidelberg: Springer, LNCS 2046, 2001 – P.143.

3. Рогачко, Е. С. Метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований

/ Е. С. Рогачко // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука». – 2016. – С.342-344.

4. Henderson, W. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services / W. Henderson, P. G Taylor // Queueing Systems. – 1990. – V. 6. – P.71 – 88
5. Митрофанов, Ю. И. Управление интенсивностями обслуживания в замкнутых сетях массового обслуживания с дискретнем временем и групповыми переходами требований / Ю. И. Митрофанов. //Компьютерные науки и информационные технологии – 2016 — С. 274 – 277.
6. Станкевич, Е. П. Математическое моделирование сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований и распределением потоков: дис. ... канд. физико-математических наук: 05.13.18/ Е. П. Станкевич // – 2018. – 124 с.