

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

**МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕЙ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Васильевой Евгении Андреевны

Научный руководитель:

доцент, к. ф.-м. н.

Е. П. Станкевич

Заведующий кафедрой:

к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Сети массового обслуживания (СеМО) представляют собой математические модели сложных дискретных систем, функционирующих в условиях случайного поступления и обработки требований. Одним из направлений теории СеМО является исследование сетей с групповым обслуживанием требований, в которых обслуживание выполняется не по одному требованию, а группой. В настоящее время развитие методов анализа и оптимизации сетей с групповым обслуживанием [1] также представляет большой интерес, так как они могут использоваться в качестве моделей реальных систем, в которых объекты обрабатываются группами, например, многопользовательских, производственных, транспортных, беспроводных сенсорных, облачных вычислительных сетей.

Цель бакалаврской работы — разработка метода оптимизации открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

1. Изучить теоретические основы однородных сетей массового обслуживания;
2. Изучить сети массового обслуживания с групповым обслуживанием и методы их анализа;
3. Разработать метод оптимизации сетей обслуживания с групповым обслуживанием;
4. Разработать алгоритм и программу вычисления минимального математического ожидания времени реакции сети;
5. Провести исследование сети массового обслуживания с групповым обслуживанием.

Методологические основы исследования систем массового обслуживания с групповым обслуживанием представлены в работах М. J. Neely, Ю. И. Митрофанова, В. М. Вишневого, Е. П. Станкевич, Н. В. Сергеевой, М. Pagano.

Теоретическая значимость бакалаврской работы. В ходе выполнения работы была рассмотрена математическая модель открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований. Были получены формулы для основных стационарных характеристик исследуемой сети:

математического ожидания (м. о.) длительности обслуживания и м. о. длительности ожидания групп требований. Разработан метод оптимизации сети массового обслуживания с групповым обслуживанием.

Практическая значимость бакалаврской работы. Представленные в работе результаты и программа могут быть использованы для математического моделирования и оптимизации сетей с групповым обслуживанием, таких как вычислительные сети, производственные линии и транспортные системы, функционирующие в режиме групповой обработки объектов.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 60 страницы, из них 41 страница — основное содержание, включая 4 рисунка, список использованных источников информации — 23 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Однородные открытые сети обслуживания» посвящён обзору основных теоретических результатов анализа классических сетей массового обслуживания.

В подразделе 1.1 приведено описание теоремы Берке, согласно которой выходящий поток из стационарной системы $M/M/\kappa$ является пуассоновским с тем же параметром λ , что и входящий поток. Показано, что это свойство выполняется для каждого из κ обслуживающих приборов независимо.

Подраздел 1.2 посвящён теореме Джексона — основополагающему результату для открытых сетей массового обслуживания. Рассматривается сеть, содержащая L систем массового обслуживания, каждая из которых имеет κ_i , $i = 1, \dots, L$, обслуживающих приборов с показательным временем обслуживания с параметром μ_i . В каждую i -ю систему извне поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью γ_i . Покидая систему i , требование с вероятностью r_{ij} , $j = 1, \dots, L$, поступает в систему j , а с вероятностью $1 - \sum_{j=1}^L r_{ij}$ покидает сеть. Введено понятие полной интенсивности потока λ_i , поступающего в систему S_i , и приведена система уравнений

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^L \lambda_j r_{ji}, \quad i = 1, \dots, L,$$

для её вычисления. Сформулировано условие эргодичности сети: для всех i должно выполняться неравенство $\lambda_i < \kappa_i \mu_i$. Приведена формулировка теоремы Джексона, согласно которой каждая система сети функционирует как независимая система $M/M/\kappa_i$ с пуассоновским входящим потоком интенсивности λ_i , а совместное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет мультипликативную форму [2]

$$P(n) = \prod_{i=1}^L P_i(n_i),$$

где $P_i(n_i)$ — стационарные вероятности для i -ой системы. Рассмотрены основные следствия теоремы: отдельные системы можно рассматривать как независимые в вероятностном смысле (несмотря на то, что на самом деле они зависимы); решение имеет форму произведения стационарных распределений отдельных систем; потоки, поступающие в отдельные системы, ведут себя как пуассоновские, хотя на самом деле могут таковыми не являться (например, при наличии обратной связи). Представлена классическая модель сети Джексона, включающая уравнение баланса

$$\alpha_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N p_{ji} \alpha_j$$

для интенсивностей потоков и условие стационарного режима

$$\rho_i = \alpha_i / (\kappa_i \mu_i) < 1.$$

Выписаны явные формулы для стационарного распределения вероятностей состояний $\phi_i(c_i)$ для случаев, когда количество требований в системе не превышает число приборов ($0 \leq c_i \leq \kappa_i$) и превышает его ($\kappa_i < c_i < \infty$).

Второй раздел «Сеть массового обслуживания с групповым обслуживанием» посвящён анализу открытой сети массового обслуживания, в которой обслуживание выполняется группами фиксированного размера.

В подразделе 2.1 рассматривается открытая сеть массового обслуживания N с непрерывным временем, состоящая из L систем массового обслуживания S_i , $i \in I$, $I = \{1, \dots, L\}$ [3]. В сеть из источника S_0 поступает пуас-

соновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0 . Требования между системами сети и источником переходят в соответствии с маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, \dots, L$. Состояние сети определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \dots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i . Каждая система S_i состоит из очереди бесконечной длины и одного обслуживающего прибора, одновременно обслуживающего группу, состоящую из b_i , $b_i \geq 1$, требований. Длительность обслуживания группы требований в системе S_i является экспоненциально распределённой случайной величиной с параметром μ_i . Если в очереди находится меньше, чем b_i требований, то обслуживающий прибор простаивает до тех пор, пока в очередь не поступит, по крайней мере, b_i требований. После завершения обслуживания в системе S_i каждое требование независимо от остальных требований группы переходит в систему S_j , $j \in I$, с вероятностью θ_{ij} . Предполагается, что размер обслуживаемой группы требований b_i значительно меньше числа систем S_j , в которые могут перейти требования, а вероятности переходов требований в смежные системы сравнимы.

В подразделе 2.2 описан метод анализа сети N . Из предположения большой размерности сети N и индивидуальной маршрутизации требований после обслуживания группы в системе S_i , $i = 1, \dots, L$, следует, что вероятность одновременного поступления двух и более требований в любую из систем обслуживания настолько мала, что ею можно пренебречь. Поэтому в каждую систему обслуживания сети поступает пуассоновский поток требований с некоторой интенсивностью. Для изолированной системы S_i приведена система уравнений равновесия, связывающая стационарные вероятности $\pi_i(n)$ состояний системы. Рассматривается процесс ξ_i гибели и размножения, который является эквивалентным по стационарному распределению вероятностей состояний системы S_i . Процесс ξ_i определён на множестве состояний $\{0, 1, \dots\}$, интенсивность перехода из состояния n в состояние $n + 1$ равна λ_i и не зависит от n , а интенсивность перехода из состояния n в состояние $n - 1$ равна $\tilde{\mu}_i(n)$ [4]. Эквивалентная сеть \tilde{N} с системами \tilde{S}_i и интенсивностями обслуживания $\tilde{\mu}_i(n)$ является сетью Джексона, что позволяет использовать мультипликативное представление стационарного распределения [5].

В подразделе 2.3 приведён анализ характеристического уравнения [6]

$$M_i^{b_i+1} - (\lambda_i + \mu_i)M_i^{b_i}\lambda_i^{b_i}\mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, L.$$

В подразделе 2.4 приведено доказательство положительности интенсивностей гибели эквивалентного процесса.

В подразделе 2.5 получены формулы для вычисления основных стационарных характеристик системы.

Математическое ожидание числа требований в каждой системе S_i , $i = 1, \dots, L$, определяется следующим выражением:

$$\bar{s}_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_i(n),$$

откуда, согласно закону Литтла, математическое ожидание длительности пребывания требования в системе S_i , $i = 1, \dots, L$ составляет:

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{s}_i}{\lambda_i}.$$

Время реакции сети

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^L \lambda_i \bar{u}_i = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^L \bar{s}_i.$$

Математическое ожидание длительности пребывания требования в системе массового обслуживания с групповым обслуживанием фиксированного размера b_i задаётся формулой: [7]

$$\bar{u}_i = \frac{b_i - 1}{2\lambda_i} + \frac{1}{M_i - \lambda_i},$$

где λ_i – интенсивность входящего потока, а M_i – корень характеристического уравнения, удовлетворяющий условию устойчивости.

Доказано что, м. о. длительности пребывания групп требований в системе массового обслуживания с групповым обслуживанием:

$$E[W_{b_i}] = \frac{\lambda_i^{b_i}}{\mu_i M_i^{b_i}} + \frac{\lambda_i^{b_i+1}}{b_i \mu_i M_i^{b_i} (M_i - \lambda_i)},$$

а, м. о. длительности обслуживания групп требований в системе массового обслуживания с групповым обслуживанием:

$$E[V_{b_i}] = \frac{1}{M_i}.$$

В подразделе 2.6 сформулирована задача оптимизации сети. Целью является нахождение вектора интенсивностей обслуживания $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_L^*)$, обеспечивающего минимум времени реакции сети:

$$\bar{\tau}_0^* = \min_{\mu} \bar{\tau}_0(\mu)$$

при ограничении на общую стоимость ресурсов сети:

$$\sum_{i=1}^L a_i \mu_i \leq C,$$

где $a_i > 0$ – весовые коэффициенты, определяющие стоимость единицы интенсивности обслуживания в системе S_i , а C – ограничение на суммарный ресурс сети.

Для решения задачи оптимизации предложено использовать метод случайного поиска, который заключается в итерационном пересчёте значений интенсивностей для случайно выбранных систем с заданным шагом и последующем вычислении времени реакции сети до тех пор, пока не будет достигнут его минимум.

Третий раздел «Алгоритм программы» посвящён описанию алгоритма и программы для анализа и оптимизации открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований.

В подразделе 3.1 описана структура программной реализации. Программа разработана на языке программирования Python с использованием библиотек NumPy, Matplotlib и tkinter. Выделены следующие основные компоненты: класс **System** для анализа изолированной системы массового обслуживания, содержащий параметры (λ, μ, b) , метод поиска корня характеристического уравнения методом деления отрезка пополам и расчёт стационарных характеристик; класс **Network** для формирования и анализа сети на основе маршрутной матрицы, интенсивности внешнего потока и параметров систем,

выполняющий вычисление интенсивностей потоков в системы и времени реакции сети $\bar{\tau}_0$; процедура `optimize_search` для случайного поиска оптимального распределения ресурса; класс `NetworkGUI` для реализации графического интерфейса.

В подразделе 3.2 приведено детальное описание алгоритма работы программы. Алгоритм состоит из пяти шагов. На первом шаге выполняется инициализация исходных данных: маршрутная матрица Θ , интенсивность входящего потока λ_0 , вектор интенсивностей обслуживания $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_L)$, вектор размеров групп $b = (b_1, \dots, b_L)$, ограничение на суммарный ресурс C , шаг изменения интенсивностей δ , количество итераций случайного поиска k , весовые коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, L$. На втором шаге вычисляются интенсивности потоков

$$\lambda_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} \lambda_0,$$

$i = 1, \dots, L$, путём решения системы, где $\omega_i = (\omega_i, \dots, \omega_L)$ получены решением методом Гаусса с выбором главного элемента. На третьем шаге для каждой системы проверяется условие устойчивости

$$\lambda_i / (b_i \mu_i) < 1,$$

численно решается характеристическое уравнение методом деления отрезка пополам с точностью $\varepsilon = 10^{-9}$, вычисляются стационарные характеристики \bar{u}_i , $E[V_{b_i}]$, $E[W_{b_i}]$ и время реакции сети. На четвёртом шаге выполняется оптимизация методом случайного поиска: начальное равномерное распределение ресурса

$$\mu_i = C / (L \cdot a_i), \quad i = 1, \dots, L,$$

затем в течение k итераций случайным образом выбираются две системы, производится перераспределение ресурса с сохранением бюджетного ограничения, вычисляется новое время реакции и при улучшении значения обновляется оптимальный вектор. На пятом шаге выводятся результаты.

В подразделе 3.3 описан графический интерфейс пользователя, состоящий из трёх функциональных вкладок. Вкладка «Параметры СеМО» содержит поля для ввода числа систем (от 2 до 15), интенсивности входящего потока λ_0 , ограничения на суммарный ресурс C , а также интерактивные панели для ввода вектора размеров групп b , вектора весовых коэффициентов a ,

вектора интенсивностей обслуживания μ и маршрутной матрицы Θ с двумерной прокруткой. Вкладка «Характеристики» содержит кнопки «Рассчитать исходную сеть» и «Оптимизировать», а также таблицу для вывода результатов: векторы λ и μ , значения \bar{u}_i , $E[V_b]$, $E[W_b]$ для каждой системы и итоговое время реакции сети $\bar{\tau}_0$. Вкладка «Визуализация» предназначена для исследования зависимости времени реакции сети от объёма доступного суммарного ресурса: задаётся диапазон изменения C (от, до, шаг), после чего программа строит график $\bar{\tau}_0^*(C)$.

Четвёртый раздел «Численный эксперимент» посвящён исследованию характеристик открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований с использованием разработанной программы и решению задачи минимизации времени реакции сети.

Рассмотрена открытая сеть массового обслуживания с групповым обслуживанием требований: $L = 10$, $\lambda_0 = 0.2$, $b = (2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2)$, $\mu = (0.5, 1.5, 1.0, 0.25, 0.5, 1.5, 0.8, 1.0, 2.0, 0.25)$,

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix},$$

$$a_i = 1, i = 1, \dots, L, C = 10.$$

На первом этапе эксперимента было выполнено вычисление стационарных характеристик сети при заданном векторе интенсивности обслуживания: вектор интенсивностей входящих потоков в системы массового обслуживания:

$$\lambda = (0.146, 0.150, 0.171, 0.261, 0.156, 0.148, 0.218, 0.126, 0.114, 0.397),$$

вектор м. о. длительности пребывания требования в системе:

$$\bar{u} = (5.553, 7.345, 6.839, 8.661, 5.335, 4.060, 5.857, 4.970, 9.253, 16.267),$$

вектор м. о. длительности обслуживания групп требований:

$$E[V_b] = (1.619, 0.607, 0.856, 2.442, 1.600, 0.611, 0.990, 0.898, 0.473, 2.155),$$

вектор м. о. длительности пребывания групп требований в очереди:

$$E[W_b] = (0.128, 0.001, 0.003, 3.065, 0.146, 0.006, 0.014, 0.014, 0.000, 11.686),$$

время реакции сети:

$$\bar{\tau}_0 = 81.008.$$

На втором этапе с использованием метода случайного поиска решается задача оптимизации вектора интенсивностей обслуживания μ и минимизации длительности пребывания требования в сети. Параметры алгоритма: размер итерационного шага $\delta = 0.001$, количество итераций $k = 10000$, ограничение на суммарный ресурс $C = 10$.

В результате получен новый вектор интенсивностей обслуживания, обеспечивающий меньшее время реакции сети. Характеристики оптимизированной сети:

$$\mu^* = (0.896, 0.888, 0.951, 1.221, 0.929, 0.902, 1.074, 0.832, 0.775, 1.532),$$

$$\bar{u}^* = (4.575, 7.807, 6.891, 2.760, 4.302, 4.520, 5.530, 5.181, 10.046, 1.942),$$

$$E[V_b]^* = (0.977, 0.966, 0.894, 0.693, 0.939, 0.970, 0.777, 1.060, 1.127, 0.538),$$

$$E[W_b]^* = (0.024, 0.004, 0.004, 0.030, 0.025, 0.025, 0.005, 0.023, 0.003, 0.034).$$

Оптимальное время реакции сети составило:

$$\bar{\tau}_0^* = 44.269,$$

что на 45.4% меньше исходного значения.

На третьем этапе проведён анализ влияния величины суммарного ре-

сурса C на оптимальное время реакции сети. Значение C варьировалось в диапазоне от 5 до 50 с шагом 2. Построен график зависимости $\bar{\tau}_0^*(C)$, который показывает монотонное убывание времени реакции с ростом ресурса. При дальнейшем увеличении C наблюдается асимптотическое стремление $\bar{\tau}_0^*$ к постоянному значению, что объясняется влиянием интенсивности входящего потока λ_0 и размеров групп b_i , $i = 1, \dots, L$, задающих нижнюю границу для времени реакции сети. Полученные результаты подтверждают, что увеличение суммарного ресурса позволяет улучшить временные характеристики сети, однако существует предел, определяемый параметрами входящего потока и размерами обслуживаемых групп.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе был разработан метод оптимизации открытых сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований. Получены выражения для вычисления математического ожидания длительности пребывания требований в очереди и математического ожидания длительности обслуживания групп требований в система массового обслуживания. Практическим результатом стала программа на языке программирования Python для анализа и оптимизации сети с групповым обслуживанием. С её помощью был реализован алгоритм, который находит распределение интенсивностей обслуживания, при которых время реакции сети принимает минимальное значение при заданных при заданных ресурсных ограничениях. Проведенные численные эксперименты и применение алгоритма случайного поиска подтвердили корректность разработанного метода.

Полученные результаты могут быть применены при проектировании технических систем, таких как вычислительные сети и производственные линии, работа которых предполагает накопление и последующую групповую обработку объектов.

Отдельные части бакалаврской работы были представлены на конференции:

1. Васильева Е. А. Стационарные характеристики системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований / Е. А. Васильева, И. Е. Тананко, Е. П. Станкевич // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2025). материалы XXIV Меж-

дународной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, — 2025. — с. 104–108.

2. Сергеева, Н. В. Оптимизация времени реакции сети массового обслуживания / Н. В. Сергеева, Е. А. Васильева // Школа теории массового обслуживания (ШТМО-2026) : материалы II Международной научной конференции. Томск, — 2026. — В печати.

Основные источники информации:

1. Neely, M. J. Stochastic Network Optimization with Application to Communication and Queueing Systems / M. J. Neely. — Cham : Springer, 2010. — 199 p.
2. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. — Москва. : Техносфера, 2003.— 512 с.
3. Станкевич, Е. П. Метод анализа открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием / Е. П. Станкевич, И. Е. Тананко, М. Пагано // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2021). материалы XX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, — 2022.— С. 252–257.
4. Сергеева, Н. В. Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований / Н. В. Сергеева, М. Пагано, И. Е. Тананко, Е. П. Станкевич // Известия Саратовского университета. — 2025.— Т. 25, № 1. — С. 128–139.
5. Stankevich, E. Analysis of Open Queueing Networks with Batch Services / E. Stankevich, I. Tananko, M. Pagano // Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2021, named after A. F. Terpugov, Tomsk, Russia, 2021. — Cham : Springer, 2022. — С. 40–51.
6. Pagano, M. On the Optimal Input Rate in Queues with Batch Service / M. Pagano, I. Tananko, E. Stankevich // Axioms. — 2023.— Vol. 12, № 7.— P. 656.
7. Stankevich, E. Optimization of open queueing networks with batch services / E. Stankevich, I. Tananko, M. Pagano // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, № 16. — P. 3027.