

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ОПТИМАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 271 группы
направления 09.04.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Васильевой Анны Владиславовны

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

Заведующий кафедрой

к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Сети массового обслуживания являются одним из основных инструментов математического моделирования сложных вычислительных, телекоммуникационных и производственных систем. Использование сетей массового обслуживания позволяет исследовать процессы распределения потоков требований, анализировать загрузку отдельных узлов сети, определять производительность систем и оценивать эффективность функционирования сложных технических комплексов. Особое место среди подобных моделей занимают замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания, в которых число циркулирующих требований является постоянным.

Задачи анализа и синтеза сетей массового обслуживания широко применяются при проектировании вычислительных комплексов, распределённых информационных систем, сетей обработки данных и систем управления ресурсами. Если задача анализа предполагает вычисление характеристик уже заданной сети, то задача синтеза заключается в определении параметров сети по заданным характеристикам её функционирования. Одной из наиболее важных задач синтеза является определение оптимального распределения потоков требований между системами обслуживания.

Существующие методы синтеза сетей массового обслуживания обладают рядом ограничений. Аналитические методы становятся вычислительно сложными при увеличении размерности сети, а приближённые итерационные методы не всегда обеспечивают устойчивость вычислений и могут существенно зависеть от выбора начальных параметров. В связи с этим актуальной является задача разработки устойчивых методов оптимизации потоков требований в замкнутых сетях массового обслуживания, сочетающих вычислительную эффективность и возможность практической программной реализации.

Цель магистерской работы — разработать и исследовать методы синтеза замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с оптимальными потоками.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Провести анализ существующих методов синтеза и оптимизации сетей массового обслуживания;
2. Исследовать методы анализа замкнутых экспоненциальных сетей мас-

- сового обслуживания;
3. Разработать модифицированный метод оптимизации потоков требований;
 4. Реализовать программный комплекс для исследования методов синтеза сетей массового обслуживания;
 5. Провести вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов.

Методологические основы исследования замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с оптимальными потоками представлены в работах J.J. Gordon, В.М. Вишневого, Ю.И. Митрофанова, А.И. Герасимова.

Теоретическая значимость. Разработанные методы расширяют аппарат синтеза замкнутых СеМО: предложена аналитическая аппроксимация нормализующей константы на основе интегрального представления, разработан итеративный градиентный метод с инерционной стабилизацией и адаптивным шагом, предложен метод точного синтеза через решение системы нелинейных уравнений с аналитическим учётом нормализующей константы.

Практическая значимость магистерской работы. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы был разработан программный комплекс для исследования замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания, позволяющий выполнять вычисление стационарных характеристик сети, проводить синтез сети с оптимальными потоками требований и осуществлять вычислительные эксперименты при различных параметрах сети.

Структура и объем работы. Магистерская работа состоит из введения, 8 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объём работы — 65 страниц, из них 51 страница — основное содержание, включая 11 рисунков, список использованных источников информации — 32 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания» посвящён обзору основных понятий теории массового обслуживания и исследованию замкнутых экспоненциальных сетей массового

обслуживания. В разделе приводится описание структуры сетей массового обслуживания, рассматриваются основные характеристики систем обслуживания и особенности функционирования замкнутых сетей с циркулирующими потоками требований.

Рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одноприборными системами. Используется оптимальный вариант задания сети с помощью следующего набора параметров: $\Gamma = \langle L, K, A, W, \Theta, \kappa, \mu, D \rangle$. В данной сети находятся L систем массового обслуживания, которые обозначены $C_i, i = 1, \dots, L$. Каждая из них представляет систему вида $M/M/1$, то есть содержит ровно 1 прибор ($\kappa = 1$). В сети циркулируют N требований одного класса ($K = 1$), длительности интервалов поступления новых требований в ее системы распределены по экспоненциальному закону распределения, интенсивность обслуживания на приборах систем определяется вектором интенсивностей обслуживания $\bar{\mu} = (\mu_i)$. Для маршрутизации требований внутри сети используется матрица вероятностей перехода Θ . В сети используется дисциплина обслуживания FCFS. Схематическое представление такой сети представлено на рисунке 1.

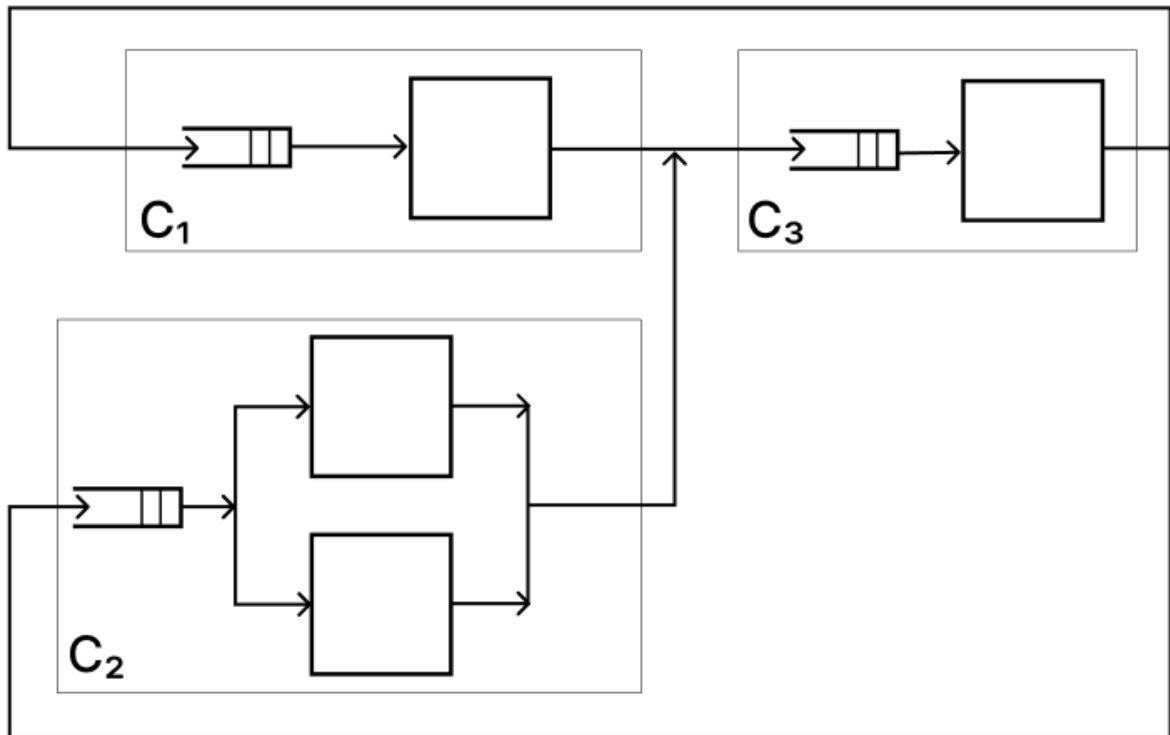


Рисунок 1 – Пример замкнутой сети массового обслуживания

В подразделе 1.1 приведено описание методов вычисления основных

характеристик систем сети, включая интенсивности потоков, среднее время пребывания требований в системе, среднюю длину очереди и коэффициенты использования систем обслуживания.

Подраздел 1.2 посвящён методам оптимизации замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания. Рассматриваются понятие "оптимальности" характеристик сети и способы их получения.

Второй раздел «Синтез замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания с оптимальными параметрами» посвящён описанию задач синтеза замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания и исследованию методов определения оптимальных параметров сети по заданным характеристикам её функционирования.

Третий раздел «Метод синтеза сети через обратную интегральную задачу» посвящён разработанному методу синтеза сети с оптимальными потоками, объединяющий аппроксимационную модель расчёта интенсивностей потока и приближённое аналитическое выражение нормализующей константы $G(N, L)$ из интегрального метода.

Для нормализующей константы, посредством применения приближения из работы Герасимова А.И., выведено аналитическое выражение:

$$G(N, L) = \begin{cases} \sum_{i=1}^L \frac{x_i^{N+L-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, & x_i \neq x_j, \\ x^N \binom{N+L-1}{N}, & x_i = x_j. \end{cases}$$

Для связи среднего числа требований \bar{n}_i с x_i предлагается использовать приближение:

$$\bar{n}_i = \frac{Nx_i}{\sum_{j=1}^L x_j}.$$

Вводится аппроксимация средней длительности пребывания:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\mu_i} (\alpha \bar{n}_i + 1), \quad \alpha \in (0, 1),$$

откуда $x_i(\alpha) = \frac{\bar{n}_i}{\alpha \bar{n}_i + 1}$. Задача синтеза сводится к минимизации функционала ошибки:

$$\varepsilon(\alpha) = \sum_{i=1}^L \left(\hat{n}_i - \frac{Nx_i(\alpha)}{\sum_{j=1}^L x_j(\alpha)} \right)^2.$$

Параметр α подбирается численно (метод L-BFGS-B). После нахождения α^* вычисляются λ_i и $\omega_i = \lambda_i / \sum \lambda_j$.

Четвертый раздел «Итеративный метод синтеза сети с адаптивной корректировкой вектора интенсивностей потока» посвящен описанию улучшенного итеративного градиентного метода. Введено обновление вектора ω на каждом шаге, которое использует диагональную аппроксимацию чувствительности $\partial \bar{n}_j / \partial \omega_i \approx \delta_{ij} \bar{n}_i / \omega_i$:

$$\omega_i^{(k+1)} = \omega_i^{(k)} + 2\eta^{(k)} \left(\frac{\hat{n}_i - \bar{n}_i^{(k)}}{\hat{n}_i} \right) \frac{\omega_i^{(k)}}{\bar{n}_i^{(k)}}.$$

Для устойчивости введён механизм инерционной стабилизации:

$$v_i^{(k)} = \beta v_i^{(k-1)} + (1 - \beta) \Delta_i^{(k)}, \quad \Delta_i^{(k)} = \left(\frac{\hat{n}_i - \bar{n}_i^{(k)}}{\hat{n}_i} \right) \frac{\omega_i^{(k)}}{\bar{n}_i^{(k)}}.$$

Окончательное правило обновления:

$$\omega_i^{(k+1)} = \omega_i^{(k)} + 2\eta^{(k)} v_i^{(k)}.$$

Шаг $\eta^{(k)}$ адаптируется по условию Армихо, обеспечивая монотонное убывание ошибки.

Пятый раздел «Метод синтеза сети с оптимальными потоками на основе решения системы уравнений» посвящен разработанному методу точного аналитического расчета оптимального вектора для сети с малыми L и N . Записываются явные полиномиальные выражения для \bar{n}_i через x_i . Например, для $L = 3, N = 3$:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{1}{G} (x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + 2(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3) + 3x_1^3), \\ \bar{n}_2 &= \frac{1}{G} (x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + 2(x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2) + 3x_2^3), \\ \bar{n}_3 &= \frac{1}{G} (x_1^2 x_3 + x_3 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + 2(x_2 x_3^2 + x_1 x_3^2) + 3x_3^3). \end{aligned}$$

Формируется система уравнений $\bar{n}_i(x_1, \dots, x_L) = \hat{n}_i G(N, L)$, которая

решается численно методом наименьших квадратов. После нахождения x_i вычисляются $\lambda_i = \mu_i x_i$ и $\omega_i = \lambda_i / \sum \lambda_j$.

Шестой раздел «Замкнутая сеть массового обслуживания с несколькими классами требований» посвящен обобщению на случай неоднородной сети, в которой циркулирует несколько классов требований.

В подразделе 6.1 рассматривается сеть, в которой циркулирует K классов требований. Каждый класс k имеет свой вектор интенсивностей обслуживания $\mu_i^{(k)}$ и своё число требований N_k . Состояние сети описывается вектором $n = (n_1^1, \dots, n_L^1, n_1^2, \dots, n_L^K)$. Стационарное распределение вероятностей имеет мультипликативную форму:

$$P(n) = \frac{1}{G(N, L)} \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^L \frac{(x_i^k)^{n_i^k}}{n_i^k!},$$

где $x_i^k = \lambda_i^k / \mu_i^k$ — приведённая интенсивность потока требований класса k в систему C_i .

В разделе 6.2 используется мультипликативная декомпозиция $G(N, L) = \prod_{k=1}^K G_k(N_k, L)$, после чего задача синтеза многоклассовой сети по методу решения системы уравнений сводится к совокупности независимых одноклассовых задач синтеза по данному методу.

Седьмой раздел «Программная реализация методов синтеза сети с оптимальными потоками» посвящен созданию программного комплекса для проведения синтеза замкнутой сети с оптимальными потоками. Программный код написан на языке Python и включает в себя модули, позволяющие провести синтез сети по описанным в прошлых разделах методам. Реализована автоматическая проверка корректности входных данных, сохранение результатов в текстовый файл и CSV.

Восьмой раздел «Численные расчеты с использованием методов синтеза» посвящен результатам численных экспериментов для всех трёх разработанных методов синтеза.

В подразделе 8.1 рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть с параметрами: $L = 3$, $N = 5$, вектор интенсивностей обслуживания $\mu = (2, 0; 1, 5; 1, 0)$, целевой вектор среднего числа требований $\hat{n} = (2, 0; 1, 5; 1, 5)$. В результате эксперимента получено оптимальное значение параметра $\alpha^* = 0,01$. Вычисленный вектор относительных интенсивностей потока составил

$\omega = (0,5149; 0,2911; 0,1940)$, а вектор среднего числа требований $\bar{n} = (1,99; 1,50; 1,50)$. Отклонение полученных значений от целевых не превышает 10^{-2} для каждой системы, что подтверждает высокую точность метода. Получены также все остальные стационарные характеристики: среднее время пребывания, средняя длина очереди, коэффициенты использования систем и интенсивности потоков.

В подразделе 8.2 рассматривается сеть с параметрами: $L = 5$, $N = 50$, $\mu = (3,0; 2,0; 2,6; 1,5; 2,5)$, целевой вектор $\hat{n} = (10,0; 8,0; 6,0; 16,0; 10,0)$. Метод успешно сошёлся за $k = 324$ итерации — в два раза быстрее данного метода без адаптивного шага. Вычисленный вектор среднего числа требований $\bar{n} = (9,98; 7,99; 6,04; 15,99; 9,98)$ практически совпадает с целевым распределением. Для исследования масштабируемости метод был протестирован при увеличении числа требований до $N = 500$: итоговая относительная ошибка не превысила 0,005. При увеличении числа систем L до 20 ошибка также осталась в пределах 2%. Получены полные стационарные характеристики: среднее время пребывания, коэффициенты использования, средняя длина очереди, интенсивности потоков.

В подразделе 8.3 рассматривается сеть с параметрами: $L = 3$, $N = 3$, $\mu = (0,5; 0,7; 0,2)$, целевой вектор $\hat{n} = (1,0; 2,0; 0,0)$. Система нелинейных уравнений, составленная на основе явных аналитических выражений для \bar{n}_i , была успешно решена численно. Получен вектор относительных интенсивностей потока $\omega = (0,3194; 0,6805; 0,00002)$ и вектор среднего числа требований $\bar{n} = (0,99; 1,99; 0,00)$. Третья система оказалась незагруженной, что полностью соответствует целевому распределению. Исследование масштабируемости показало, что при увеличении числа требований до $N = 14$ число состояний сети достигает 120, что приводит к существенному росту вычислительной сложности. Таким образом, метод рекомендуется для сетей с небольшими и средними значениями L и N (например, $N \leq 14$), где аналитические выражения можно использовать напрямую.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведённого анализа были разработаны модифицированные методы синтеза сети с оптимальными потоками, в которых используется построение систем нелинейных уравнений, применение рекуррентных вычисли-

тельных схем и улучшение выражения для расчета нормирующей константы. Дополнительно в алгоритмы введены механизмы масштабирования параметров и адаптивного изменения шага итерационного процесса, позволяющие повысить устойчивость вычислений и уменьшить вероятность расходимости методов.

Для практической проверки предложенных методов был разработан программный комплекс на языке Python, реализующий несколько методов синтеза сетей массового обслуживания и обеспечивающий автоматизацию вычислительных экспериментов. Программа позволяет выполнять синтез по заданным методам, проводить расчёт стационарных характеристик сети и сохранять результаты вычислений для последующего анализа.

В ходе вычислительных экспериментов были исследованы особенности поведения разработанных методов при различных параметрах сети массового обслуживания: числе требований и количестве систем обслуживания. Исследование результатов экспериментов показало, что предложенные модификации позволяют повысить устойчивость итерационного процесса и улучшить согласованность получаемых результатов с заданными целевыми характеристиками сети. Точность получаемых расчетов достаточна для качественного моделирования изучаемой сети массового обслуживания.

Таким образом, при написании выпускной квалификационной работы поставленная цель была достигнута, посредством выполнения всех необходимых для этого задач: изучены существующие методы синтеза сетей с оптимальными потоками, подробно рассмотрены разработанные методы синтеза таких сетей, разработана программная реализация данных методов, позволяющая провести исследование сети с оптимальными потоками и провести вычислительные эксперименты.

Отдельные части магистерской работы были представлены на конференции:

1. Васильева А. В., Тананко И. Е. Анализ применимости обратного интегрального метода для расчёта замкнутых сетей массового обслуживания с оптимальными потоками // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы XIV Научно-практической конференции. Саратов, 20–22 ноября 2025 г. Саратов : Саратовский университет, 2025. Вып. 10. С. 10–13.

Основные источники информации:

- 1 Gordon W. J., Newell G. F. Closed Queueing Systems with Exponential Servers // Operations Research. — 1967. — Vol. 15, No. 2. — P. 254-265.
- 2 Митрофанов Ю. И. Метод синтеза замкнутых сетей массового обслуживания с экспоненциальным распределением длительностей обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. — 2002. — № 1. — С. 77-84.
- 3 Герасимов А. И. Интегральный метод расчёта замкнутых сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. — 1992. — Т. 28, № 2. — С. 96-108.
- 4 Жадан В. Г. Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2015. — 320 с.
- 5 Митрофанов Ю. И. Синтез сетей массового обслуживания. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1995. — 164 с.
- 6 Вишнеvский В. М., Круглый З. Л. Оптимизация замкнутых стохастических сетей // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 2. — С. 41-53.
- 7 Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K. S. Queueing Networks and Markov Chains: Modeling and Performance Evaluation With Computer Science Applications. — New-York: John Wiley & Sons, 2006. — 896 p.
- 8 Гурьянов А. И., Митрофанов Ю. И. Определение параметров замкнутых линейных сетей систем массового обслуживания // Системное моделирование / Вычислительный центр СО АН СССР. — 1970. — № 1. — С. 39-49.