

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**Гиперболический погранслой в цилиндрической оболочке при  
антисимметричных торцевых воздействиях**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Тишиной Александры Сергеевны

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Зав. кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

**Введение.** **Актуальность** темы исследования обусловлена широким применением тонкостенных элементов, в частности упругих цилиндрических оболочек, в качестве несущих узлов современной техники, работающих в условиях интенсивных динамических и ударных нагрузок. Прогнозирование несущей способности и оценка прочностного ресурса подобных конструкций напрямую зависят от точности описания волновых процессов в материале. В связи с этим особое значение приобретает анализ нестационарных явлений, индуцированных продольным ударом по торцу оболочки. Разработка строгих аналитических методов, позволяющих адекватно описывать высокочастотные волновые пакеты и определять экстремальные динамические напряжения без привлечения ресурсоемкого численного моделирования, представляет собой важную фундаментальную и прикладную задачу.

**Цель работы** - состоит в получении аналитического решения задачи о напряженно-деформированном состоянии упругой цилиндрической оболочки в окрестности фронта нестационарной волны, возбуждаемой продольным ударом с синусоидальным профилем распределения нагрузки по толщине.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) обезразмеривание исходной математической модели динамического поведения оболочки;
- 2) применение интегрального аппарата Лапласа — Фурье для перехода к уравнениям в изображениях;
- 3) Нахождение точного аналитического оригинала по пространственной координате с помощью интегральной теоремы о вычетах;
- 4) применение метода прифронтной асимптотики для перехода к оригиналам времени;
- 5) оценка сходимости аналитических решений и проведение численного моделирования для верификации качественных эффектов.

**Материалы исследования** включают в себя классические методы механики деформируемого твердого тела и математического анализа. В основу аналитического исследования положен метод интегральных преобразований в сочетании с аппаратом теории функций комплексного переменного (вычислением интегралов по замкнутому контуру на основе вычетов) и элементами асимптотического анализа. Верификация математической модели, расчет специальных рядов Фурье - Бесселя, а также компьютерное моделирование и визуализация волновых полей выполнены с привлечением пакета прикладных программ Mathcad.

**Научная новизна и значимость работы** заключается в том, что в отличие от классических приближенных подходов, в работе получено математически строгое аналитическое решение задачи о продольном ударе. Аналитически доказана точная сходимость полученного решения заданному граничному условию непосредственно на фронте волны. Предложенный подход дает инженерам достоверный расчетный аппарат для оценки экстремальных динамических напряжений после приложения ударной нагрузки.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель динамического поведения оболочки, базирующаяся на переходе от волнового уравнения к краевой задаче в пространстве двойных интегральных изображений.
2. Строгий аналитический подход к нахождению оригиналов искомых функций, основанный на применении теоремы вычетов и метода прифронтной асимптотики.
3. Закономерности нестационарного напряженно-деформированного состояния оболочки при воздействии торцевой ударной нагрузки с синусоидальным профилем.

**Структура ВКР.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников.

**В первой главе** «Постановка задачи и математическая модель» рассматривается процесс распространения продольных волн в упругой цилиндрической оболочке полутолщины  $h$ . Поведение среды вблизи фронта волны формализуется посредством гиперболического волнового уравнения относительно  $v_1$ :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - продольная координата,  $z$  - нормальная координата по толщине,  $t$  - время,  $c_1$  - скорость продольной волны.

Математическая модель приводится к безразмерному виду, что позволяет сократить число варьируемых физических параметров и обобщить полученные решения:

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{h}, \quad (2)$$

где  $c_2$  - скорость сдвиговой волны.

С учетом новых переменных дифференциальное уравнение приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\kappa^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ ,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Предполагается, что до момента удара оболочка находилась в состоянии покоя, что определяет нулевые начальные условия:

$$v_1|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

На торце оболочки ( $\xi = 0$ ) задается ударное воздействие в виде синусоидального распределения нормального напряжения.

$$\sigma_{11}|_{\xi=0} = \sin(m\pi\zeta) H(\tau), \quad (5)$$

где  $m$  – положительное целое число,  $H(\tau)$  - функция Хевисайда.

Связь между напряжением и производной продольного перемещения выражается формулой:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{A} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \quad (6)$$

где константа  $A$  зависит от физико-геометрических параметров ( $E$  - модуль Юнга):

$$A = \frac{2(1 + \nu)\kappa^2 h}{E}. \quad (7)$$

Граничное условие на торце для перемещения принимает вид:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} |_{\xi=0} = A \sin(m\pi\zeta) H(\tau). \quad (8)$$

Лицевые поверхности оболочки предполагаются свободными от напряжений, что дает граничные условия при  $\zeta = \pm 1$ :

$$\sigma_{33}|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{13}|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (9)$$

**Во второй главе** «Интегральные преобразования и решение в пространстве изображений» рассматривается процедура аналитического решения деформированного состояния оболочки в спектральной области.

Для исключения временных производных к исходному безразмерному уравнению применяется интегральное преобразование Лапласа с комплексным параметром  $s$ . Принимая во внимание нулевые начальные условия, вторая производная по времени переходит в алгебраическое выражение  $s^2 v_1^L$ , и уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 s^2 v_1^L = 0. \quad (10)$$

Граничное условие на торце  $\xi = 0$  в пространстве Лапласа (с учетом табличного преобразования функции Хевисайда  $L\{H(\tau)\} = 1/s$ ) записывается как:

$$\frac{\partial v_1^L}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{A}{s} \sin(m\pi\zeta). \quad (11)$$

Применение косинус-преобразования Фурье позволило исключить продольные координаты и свести исходную систему к неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 v_1^{LC}}{d\zeta^2} - \lambda^2 v_1^{LC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \sin(m\pi\zeta), \quad (12)$$

где

$$\lambda^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2. \quad (13)$$

Общее решение неоднородного ОДУ ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$v_1^{LC}(\zeta) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda\zeta) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda\zeta) + v_{\text{ч.н.}}^{LC}(\zeta). \quad (14)$$

Ввиду того, что правая часть уравнения пропорциональна синусу, частное решение задается в форме  $v_{\text{ч.н.}}^{LC}(\zeta) = B \sin(m\pi\zeta)$ . Подстановка в ОДУ позволяет определить амплитуду  $B$ :

$$-B(m\pi)^2 \sin(m\pi\zeta) - \lambda^2 B \sin(m\pi\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \sin(m\pi\zeta), \quad (15)$$

$$B = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \frac{1}{\lambda^2 + (m\pi)^2}. \quad (16)$$

Для нахождения констант интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  используются граничные условия на свободных лицевых поверхностях оболочки ( $\zeta = \pm 1$ ).

Подстановка условия в общее решение формирует систему алгебраических уравнений:

$$C_1 \operatorname{ch}(\lambda) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda) + B \sin(m\pi) = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \quad (17)$$

$$C_1 \operatorname{ch}(\lambda) - C_2 \operatorname{sh}(\lambda) - B \sin(m\pi) = 0 \quad \text{при } \zeta = -1. \quad (18)$$

Поскольку  $m$  является целым числом, строго выполняется условие  $\sin(m\pi) = 0$ .

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (19)$$

Выражение для продольного перемещения в пространстве двойных изображений Лапласа-Фурье принимает следующий вид:

$$v_1^{LC}(\zeta, \chi, s) = B \sin(m\pi\zeta) = -\sqrt{\frac{2A}{\pi s}} \frac{\sin(m\pi\zeta)}{\chi^2 + \kappa^2 s^2 + (m\pi)^2}. \quad (20)$$

**В третьей главе** «Обратные интегральные преобразования и анализ результатов» осуществляется восстановление физических полей перемещений и напряжений с помощью последовательного обращения интегральных преобразований. На первом этапе восстановления решения по пространственной координате применено обратное косинус-преобразование Фурье к функции  $v_1^{LC}$ . Возникающий несобственный интеграл вычисляется методами теории функций комплексного переменного с использованием основной теоремы вычетов Коши. Применение основной теоремы вычетов Коши позволило свести задачу к анализу подынтегральной функции, имеющей в верхней полуплоскости переменной  $\chi$  единственный простой полюс первого порядка в точке  $\chi_1 = i\sqrt{\kappa^2 s^2 + (m\pi)^2}$ , вычет в котором дает точное аналитическое решение задачи в пространстве Лапласа:

$$v_1^L(\xi, \zeta, s) = - \frac{(A \sin(m \pi \zeta))}{(s \sqrt{\kappa^2 s^2 + (m \pi)^2})} e^{-\xi \sqrt{\kappa^2 s^2 + (m \pi)^2}} \quad (21)$$

Для аналитического описания волнового процесса в узкой окрестности фронта возмущения применена процедура прифронтной асимптотики. С этой целью подкоренное выражение в показателе экспоненты аппроксимировано асимптотическим рядом Тейлора. Ограничение амплитудного множителя первым членом разложения позволило привести изображение перемещения к асимптотическому виду, допускающему переход к оригиналам:

$$v_1^L(\xi, \zeta, s) \approx - \frac{(A \sin(m \pi \zeta))}{(\kappa s^2)} e^{-\kappa \xi s} e^{-\frac{(m \pi)^2 \xi}{(2 \kappa s)}} \quad (22)$$

Экспоненциальный множитель  $e^{-\kappa \xi s}$  по теореме запаздывания, определяет безразмерную скорость переноса деформации и момент прихода фронта волны в заданную точку оболочки:  $\tau = \kappa \xi$ , порождая в оригинале временной сдвиг и функцию Хевисайда  $H(\tau - \kappa \xi)$ .

Оставшаяся операторная часть изображения вида  $\left(\frac{1}{s^2}\right) e^{\frac{b}{s}}$  строго преобразуется в цилиндрическую функцию Бесселя первого рода первого порядка  $J_1$ .

$$v_1(\xi, \zeta, \tau) = - \frac{2\sqrt{2}(1 + \nu)\kappa^{3/2}h}{Em\pi\sqrt{\xi}} \sin(m\pi\zeta) \sqrt{\tau - \kappa\xi} J_1(\text{Arg}) \cdot H(\tau - \kappa\xi), \quad (23)$$

где  $\text{Arg} = m\pi \sqrt{\frac{2\xi}{\kappa}(\tau - \kappa\xi)}$ .

Вычисление нормального напряжения  $\sigma_{11}$  реализовано на основе линейного закона Гука, связывающего напряжение с производной продольного перемещения.

Дифференцирование, выполненное непосредственно в пространстве Лапласа с сохранением главных членов прифронтной асимптотики, понижает

порядок оператора по переменной  $s$  до структуры  $\frac{1}{s} e^{-\frac{b}{s}}$ . Полученная операторная форма при выполнении обратного преобразования Лапласа позволяет выразить решение через функцию Бесселя нулевого порядка  $J_0$ , что определяет итоговое аналитическое представление волнового профиля напряжений:

$$\sigma_{11}(\xi, \zeta, \tau) = \sin(m\pi\zeta) J_0 \left( m\pi \sqrt{\frac{2\xi}{k}} (\tau - k\xi) \right) H(\tau - k\xi) \quad (24)$$

Полученная математическая модель позволяет выявить следующие особенности волнового процесса:

1. **Точность на фронте.** Непосредственно на фронте волны (при  $\tau = k\xi$ ) решение строго вырождается в заданное граничное условие, так как  $J_0(0) = 1$ .
2. **Антисимметрия.** Сохраняется изгибный характер деформаций: срединная поверхность оболочки ( $\zeta = 0$ ) выступает нейтральной осью с нулевыми напряжениями.

Для комплексного исследования динамики волновых процессов и верификации разработанного математического аппарата реализовано численное моделирование напряженно-деформированного состояния оболочки в вычислительной среде Mathcad. Расчеты выполнены для фиксированного безразмерного момента времени  $\tau_0 = 2$ , что позволило построить сечения волнового поля и проанализировать распределение напряжений в прифронтной области.

На Рисунке 1 представлено распределение нормальных динамических напряжений  $\sigma_{11}$  по безразмерной толщине оболочки  $\zeta$  в фиксированных сечениях прифронтной зоны.

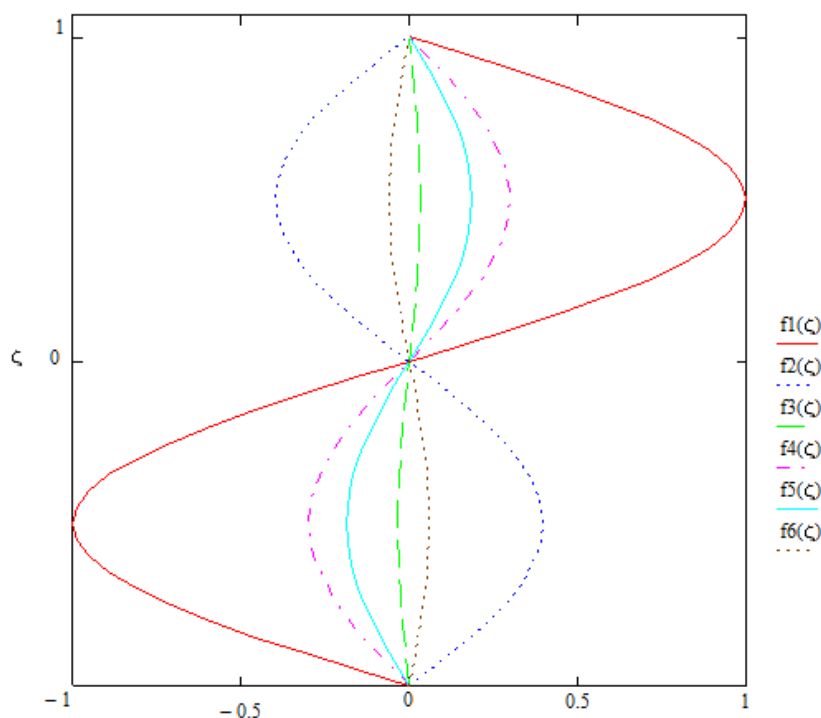


Рисунок 1 – Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  по толщине оболочки  $\zeta$  в прифронтной зоне

На этом графике:

$$f_1(\zeta) = \sigma_{11}(2, \zeta, 2), f_2(\zeta) = \sigma_{11}(1.999, \zeta, 2), f_3(\zeta) = \sigma_{11}(1.998, \zeta, 2),$$

$$f_4(\zeta) = \sigma_{11}(1.997, \zeta, 2), f_5(\zeta) = \sigma_{11}(1.996, \zeta, 2), f_6(\zeta) = \sigma_{11}(1.995, \zeta, 2).$$

Анализ графических зависимостей (Рис. 1) позволяет сделать следующие выводы:

1. **Характер напряженного состояния.** Профиль распределения имеет строгую антисимметричную форму относительно срединной поверхности ( $\zeta = 0$ ).
2. **Дисперсионное затухание.** По мере удаления от фронта волны вглубь материала (при уменьшении координаты  $\xi_0$ ) амплитуда пиковых значений нормальных напряжений монотонно затухает, что обусловлено свойствами функции Бесселя нулевого порядка  $J_0$ .

Для исследования изменения напряженного состояния по пространственной координате на разном удалении от срединной поверхности был построен график (рисунок 2).

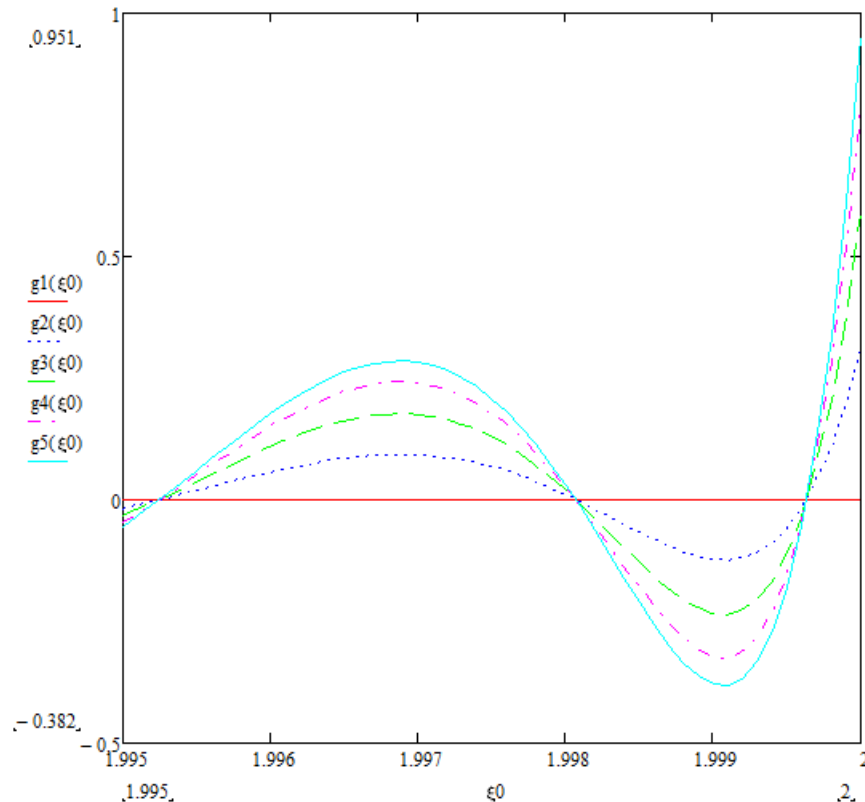


Рисунок 2 – Зависимость нормального напряжения  $\sigma_{11}$  от продольной координаты  $\xi_0$  в окрестности фронта волны

На этом графике:

$$g_1(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0, 2) \quad g_2(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.1, 2), \quad g_3(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.2, 2),$$

$$g_4(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.3, 2), \quad g_5(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.4, 2), \quad g_6(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.5, 2).$$

**Заключение.** В представленной выпускной квалификационной работе проведено комплексное теоретическое исследование процесса распространения нестационарных возмущений в упругой цилиндрической оболочке. Ключевым результатом исследования является построение замкнутого аналитического решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки при антисимметричном (изгибном) ударном воздействии с синусоидальным распределением нагрузки по толщине.

Использование аппарата интегральных преобразований Лапласа и Фурье в сочетании с методами прифронтной асимптотики позволило свести исходную краевую задачу к аналитическому виду. Верификация теоретических положений, выполненная посредством численной реализации в вычислительной среде Mathcad, подтвердила высокую точность и сходимость полученного решения.

Разработанная математическая модель и установленные количественные закономерности являются эффективным аналитическим инструментом для оценки динамической прочности тонкостенных конструкций, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике, при воздействии интенсивных импульсных изгибных нагрузок.