

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономике

**Применение методов Монте-Карло для оценки стоимости экзотических
опционов**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета

Есяян Виктории Станиславовны

Научный руководитель

профессор, д.э.н., профессор

должность, уч. степень, звание

В.А.Балаш

Заведующий кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент

В.С.Рыхлов

Саратов 2026

Введение. Современный финансовый мир отличается высокой изменчивостью цен, тесной взаимосвязью рынков по всему миру и широким применением сложных финансовых инструментов, называемых производными. Среди них особое место занимают экзотические опционы, такие как барьерные, азиатские, lookback, quanto и другие. Их особенность в том, что их стоимость зависит не только от текущей цены базового актива, но и от того, как эта цена менялась со временем. Эти инструменты позволяют участникам рынка более точно защищаться от специфических рисков. Однако их оценка гораздо сложнее, чем у обычных европейских или американских опционов. Аналитические формулы существуют лишь для небольшого числа таких опционов, поэтому на практике часто прибегают к численным методам, в первую очередь к методу Монте-Карло.

Главный недостаток метода Монте-Карло – его медленная работа. Точность оценки растет медленнее, чем количество симуляций: ошибка уменьшается пропорционально квадратному корню из числа смоделированных сценариев. Чтобы получить достаточно точный результат, нужно провести очень много симуляций, что требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому возникает необходимость в разработке и применении методов, которые позволяют уменьшить разброс результатов (дисперсию). К таким методам относятся антитетические переменные, контрольные переменные, стратифицированная выборка и другие. Они помогают повысить точность оценки, не увеличивая при этом пропорционально количество моделируемых сценариев.

Актуальность данной работы заключается в необходимости комплексного подхода, который сочетает классический метод Монте-Карло с методами снижения дисперсии для оценки экзотических опционов на основе реальных рыночных данных. Такой подход позволит повысить точность расчетов, снизить затраты на вычисления и получить более надежные оценки справедливой стоимости опционов. Это особенно важно для практического применения в финансовом анализе и управлении рисками.

Цель бакалаврской работы – провести сравнительный анализ эффективности методов снижения дисперсии (антитетические переменные и контрольная переменная) при оценке цены европейского quanto-опциона методом

Монте-Карло на реальных рыночных данных. Для достижения поставленной цели были определены следующие задачи:

1. Изучить теоретические основы оценки экзотических опционов, метода Монте-Карло для моделирования цен активов (геометрическое броуновское движение, разложение Холецкого) и методов снижения дисперсии (антитетические переменные, контрольная переменная).
2. Реализовать на Python алгоритм Монте-Карло для оценки цены европейского quanto-опциона типа «колл» на основе реальных исторических данных (валютные пары EUR/USD и GBP/USD за 2020–2025 гг.) с применением двух методов снижения дисперсии.
3. Провести численные эксперименты, варьируя количество сценариев от 1000 до 100 000, и сравнить методы по критериям: стандартная ошибка, коэффициент снижения дисперсии, время выполнения, эквивалентное число траекторий для заданной точности.
4. Сформулировать рекомендации по выбору наиболее эффективного метода для оценки quanto-опционов.

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников, а также приложений, содержащих код реализации метода Монте-Карло и диаграмм.

Первый раздел посвящен теоретическим основам оценки экзотических опционов. В ней показывается, что в отличие от стандартных (ванильных) опционов, выплата по экзотическим зависит не только от финальной цены актива, но и от всей траектории её изменения, экстремумов, средних значений или условий активации/деактивации. Рассмотрена классификация основных видов: барьерные (knock-in/out), опционы lookback (зависят от максимума/минимума), азиатские (от средней цены) и quanto-опционы (с фиксацией валютного риска). Для каждого вида приведены примеры функций выплат. Обсуждается риск-нейтральный подход к ценообразованию, а также делается обзор методов оценки: от аналитических формул (для простейших барьерных) до численных методов, среди которых выделен метод Монте-Карло как наиболее универсальный для траекторно-зависимых опционов. Глава закладывает теоретическую базу для выбора методов снижения дисперсии и последующей реализации на Python.

Во втором разделе рассматриваются теоретические и практические основы применения метода Монте-Карло для оценки стоимости экзотических опционов, включая его математическое обоснование, особенности реализации, а также модели динамики базового актива и алгоритмы численного моделирования.

В большинстве случаев задача определения справедливой цены опциона сводится к вычислению математического ожидания функции выплат, которое не может быть получено в замкнутом виде. В связи с этим возникает необходимость использования численных методов, среди которых метод Монте-Карло является наиболее универсальным.

В данном разделе подробно рассматривается основная идея метода Монте-Карло, основанная на замене математического ожидания выборочным средним, полученным на основе моделирования независимых реализаций случайных величин. Приводится его математическое обоснование с использованием закона больших чисел и центральной предельной теоремы, а также анализируются свойства оценок, включая их сходимость и погрешность.

Далее рассматривается применение метода Монте-Карло в задачах финансовой математики. Показано, что в рамках риск-нейтрального подхода цена производного финансового инструмента определяется как дисконтированное математическое ожидание его будущей выплаты, зависящей от траектории цены базового актива. Это делает метод Монте-Карло особенно эффективным инструментом для оценки экзотических опционов.

Отдельное внимание уделяется моделированию динамики цены базового актива. В работе рассматриваются две основные модели: классическая модель Блэка–Шоулза, основанная на геометрическом броуновском движении с постоянной волатильностью, и модели класса GARCH, позволяющие учитывать изменчивость волатильности во времени. Для каждой модели приводятся соответствующие стохастические уравнения и алгоритмы генерации траекторий.

Кроме того, в разделе описывается общий алгоритм оценки справедливой цены опциона методом Монте-Карло, включающий генерацию траекторий базового актива, вычисление функций выплат для каждой траектории и последующее усреднение с дисконтированием. Рассматриваются особенности

реализации алгоритма для различных типов экзотических опционов, таких как азиатские, барьерные и опционы типа lookback.

Важной частью раздела является анализ точности получаемых оценок. Приводятся методы оценки дисперсии и построения доверительных интервалов, а также рассматриваются подходы к выбору необходимого числа моделируемых траекторий. Особое внимание уделяется методам уменьшения дисперсии, включая использование антитетических переменных, контрольных переменных и стратифицированной выборки, позволяющих существенно повысить эффективность метода.

Таким образом, второй раздел формирует целостное представление о методе Монте-Карло как универсальном инструменте численного ценообразования экзотических опционов, объединяя теоретические основы, модели динамики базового актива и практические алгоритмы реализации.

Третий раздел посвящён разработке алгоритма и программной реализации метода Монте-Карло для оценки стоимости европейского basket-опциона типа «колл», а также исследованию эффективности методов снижения дисперсии. **Исходные данные и параметры модели**

Для оценки цены европейского basket-опциона «колл» использованы реальные рыночные данные по валютным парам **USD/RUB** и **CNY/RUB** за период с 3 апреля 2023 г. по 31 декабря 2025 г. (718 наблюдений). Источник – Yahoo Finance (библиотека `yfinance`). На рис. 1 и рис. 2 представлена динамика курсов, в табл. 1 приведены описательные статистики.

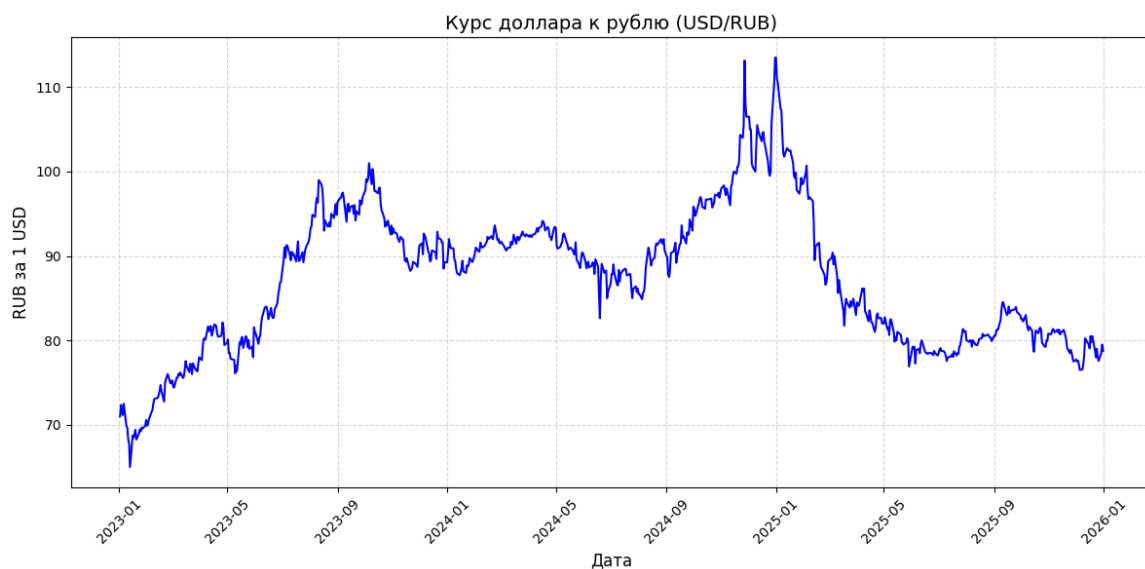


Рисунок 1 — Динамика курса USD/RUB (2023–2025)

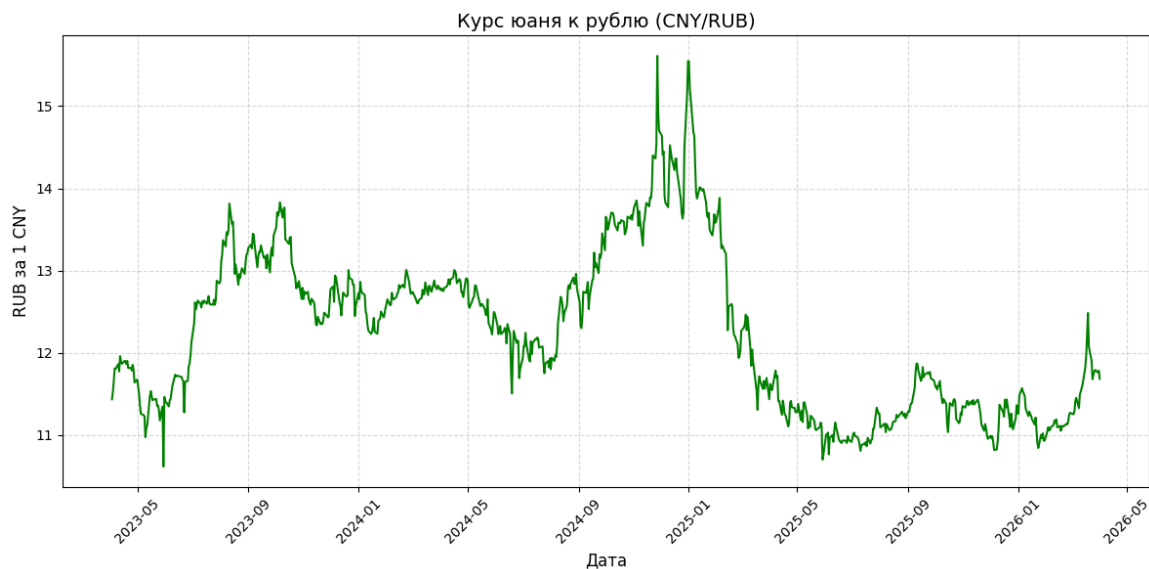


Рисунок 2 — Динамика курса CNY/RUB (2023–2025)

Таблица 1 — Базовая статистика цен валютных пар

Параметр	USD/RUB	CNY/RUB
Количество наблюдений	718	718
Среднее	88.5345	12.3304
Стандартное отклонение	7.4809	0.9689
Минимум	76.1000	10.6167
Максимум	113.4955	15.6117

По логарифмическим доходностям рассчитаны годовые волатильности и корреляция:

$$\sigma_{\text{USD}} = 0.1922, \quad \sigma_{\text{CNY}} = 0.1927, \quad \rho = 0.9127. \quad (1)$$

Параметры опциона

Рассматривается европейский basket-опцион типа «колл» на портфель B_t , состоящий из двух активов с равными весами:

$$B_t = \frac{1}{2} (\text{USD/RUB}_t + \text{CNY/RUB}_t). \quad (2)$$

Текущая стоимость портфеля (на 31.12.2025) $B_0 = 45.0050$. Страйк $K = 40.5045$ (90% от B_0). Безрисковая ставка $r = 3\%$ годовых, срок до экспирации $T = 1$ год. Остальные параметры сведены в табл. 2.

Таблица 2 — Параметры опциона и рыночные данные

Текущий USD/RUB	78.7500
Текущий CNY/RUB	11.2601
Портфель B_0	45.0050
Страйк K	40.5045
Безрисковая ставка r	3.00%
Срок T	1 год
Волатильность USD/RUB σ_1	0.1922
Волатильность CNY/RUB σ_2	0.1927
Корреляция ρ	0.9127

Реализация алгоритмов на Python

В программе задействованы следующие библиотеки:

- `yfinance` — загрузка исторических котировок валютных пар с портала Yahoo Finance;
- `numpy` — выполнение матричных операций, генерация псевдослучайных чисел, вычисление статистик;
- `pandas` — обработка временных рядов и расчёт описательных статистик;

- `matplotlib.pyplot` — построение графиков динамики цен, сходимости оценок и распределений выплат;
- `time` — измерение времени выполнения вычислительных экспериментов.

Загрузка данных и расчёт параметров

Листинг 1: Загрузка котировок USD/RUB и CNY/RUB

```

1 import yfinance as yf
2 import numpy as np
3
4 tickers = ['USDRUB=X', 'CNYRUB=X'] # Yahoo Finance
5 df = yf.download(tickers, start='2023-04-03', end='2025-12-31')['Close']
6 df.columns = ['USD/RUB', 'CNY/RUB']
7 #
8 returns = np.log(df / df.shift(1)).dropna()
9 sigma1 = returns['USD/RUB'].std() * np.sqrt(252)
10 sigma2 = returns['CNY/RUB'].std() * np.sqrt(252)
11 rho = returns.corr().iloc[0,1]
12 print(f"Vol USD: {sigma1:.4f}, Vol CNY: {sigma2:.4f}, Corr: {rho:.4f}")

```

Генерация коррелированных траекторий ГБМ

Моделирование цен активов осуществляется в рамках геометрического броуновского движения:

$$dS_i = rS_i dt + \sigma_i S_i dW_i, \quad i = 1, 2, \quad dW_1 dW_2 = \rho dt. \quad (3)$$

Для учёта корреляции используется разложение Холецкого корреляционной матрицы 2×2 :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Листинг 2: Генерация путей для двух активов

```

1 def cholesky_2d(rho):
2     return np.array([[1.0, 0.0], [rho, np.sqrt(1 - rho**2)]])
3 def generate_paths(S0_1, S0_2, r, sigma1, sigma2, rho, T, dt, n_paths):
4     n_steps = int(T / dt)
5     L = cholesky_2d(rho)
6     S1 = np.zeros((n_paths, n_steps+1))
7     S2 = np.zeros((n_paths, n_steps+1))
8     S1[:,0] = S0_1; S2[:,0] = S0_2
9     for t in range(1, n_steps+1):
10        Z = np.random.normal(0, 1, size=(n_paths, 2))
11        corrZ = Z @ L.T
12        dW1 = corrZ[:,0] * np.sqrt(dt)
13        dW2 = corrZ[:,1] * np.sqrt(dt)
14        S1[:,t] = S1[:,t-1] * np.exp((r - 0.5*sigma1**2)*dt + sigma1*dW1)
15        S2[:,t] = S2[:,t-1] * np.exp((r - 0.5*sigma2**2)*dt + sigma2*dW2)
16    return S1, S2

```

Стандартный метод Монте-Карло

Выплата по опциону определяется как $\max(B_T - K, 0)$, где B_T вычисляется по формуле (2). Оценка цены опциона:

$$\hat{C}_{\text{MC}} = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(B_T^{(i)} - K, 0). \quad (5)$$

Стандартная ошибка оценки: $\text{SE} = \frac{\sigma_{\text{payoffs}}}{\sqrt{N}}$.

Листинг 3: Стандартная оценка цены basket-опциона

```

1 def price_plain_mc(S0_1, S0_2, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, dt, n_paths):
2     S1, S2 = generate_paths(S0_1, S0_2, r, sigma1, sigma2, rho, T, dt,
3                             n_paths)
4     B_T = (S1[:, -1] + S2[:, -1]) / 2
5     payoffs = np.maximum(B_T - K, 0)
6     price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
7     std_err = np.std(payoffs) / np.sqrt(n_paths)
8     return price, std_err

```

Метод антитетических переменных

Для каждой пары стандартных нормальных векторов Z генерируется также $-Z$. Скорректированная оценка цены:

$$\hat{C}_{\text{anti}} = e^{-rT} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left(\max(B_T(Z^{(i)}) - K, 0) + \max(B_T(-Z^{(i)}) - K, 0) \right). \quad (6)$$

Листинг 4: Антитетическая генерация (фрагмент)

```
1 def generate_antithetic_paths(...):
2     half = n_paths // 2
3     Z = np.random.normal(0, 1, size=(half, 2))
4     Z_all = np.vstack([Z, -Z])
5     #
        generate_paths
```

Метод контрольной переменной

В качестве контрольной переменной C выбрана стоимость портфеля B_T . Её теоретическое математическое ожидание в модели ГБМ:

$$\mathbb{E}[B_T] = B_0 e^{rT}. \quad (7)$$

Скорректированная выплата:

$$F_{CV} = \max(B_T - K, 0) - \beta (B_T - \mathbb{E}[B_T]), \quad (8)$$

где оптимальный коэффициент $\beta = \frac{\text{Cov}(F, B_T)}{\text{Var}(B_T)}$. Оценка цены:

$$\hat{C}_{CV} = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{CV}^{(i)}. \quad (9)$$

Листинг 5: Метод контрольной переменной (портфель)

```
1 def price_control_variate_mc(S0_1, S0_2, K, r, sigma1, sigma2, rho, T, dt,
2     n_paths):
3     S1, S2 = generate_paths(S0_1, S0_2, r, sigma1, sigma2, rho, T, dt,
4         n_paths)
5     B_T = (S1[:, -1] + S2[:, -1]) / 2
6     payoffs_raw = np.maximum(B_T - K, 0)
```

```

5 C = B_T
6 E_C = (S0_1 + S0_2)/2 * np.exp(r * T)
7 beta = np.cov(payoffs_raw, C)[0,1] / np.var(C)
8 payoffs_cv = payoffs_raw - beta * (C - E_C)
9 price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs_cv)
10 std_err = np.std(payoffs_cv) / np.sqrt(n_paths)
11 return price, std_err

```

Результаты численного эксперимента Программа выполнена для шести значений числа траекторий $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 50000, 100000$. Стандартные ошибки (SE) приведены в табл. 3, коэффициенты снижения дисперсии – в табл. 4.

Таблица 3 — Стандартные ошибки оценки цены опциона для различных N

N	Plain MC	Antithetic	Control Variate
1000	0.2334	0.2412	0.0602
5000	0.1046	0.1027	0.0267
10000	0.0739	0.0732	0.0188
20000	0.0518	0.0520	0.0135
50000	0.0329	0.0328	0.0085
100000	0.0232	0.0232	0.0060

Коэффициент снижения дисперсии определяется как

$$VR = \frac{SE_{\text{plain}}^2}{SE_{\text{method}}^2}. \quad (10)$$

Таблица 4 — Коэффициенты снижения дисперсии ($VR > 1$ означает улучшение)

N	Antithetic	Control Variate
5000	1.038	15.34
10000	1.018	15.39
50000	1.001	14.80

Анализ. Метод антитетических переменных практически не снижает дисперсию ($VR \approx 1$). Метод контрольной переменной даёт снижение дис-

персии в **14.8–15.4 раза**, что эквивалентно сокращению числа траекторий на 93%. Время выполнения при $N = 50000$: Plain MC – 3.78 с, Antithetic – 3.96 с, Control Variate – 4.68 с. С учётом снижения дисперсии метод контрольной переменной оказывается примерно в **12 раз быстрее** стандартного Монте-Карло для достижения той же точности.

Выводы по практической части

- Разработана программа на Python для оценки европейского basket-опциона на основе реальных данных USD/RUB и CNY/RUB.
- Метод антитетических переменных неэффективен в условиях высокой корреляции активов.
- Метод контрольной переменной (стоимость портфеля B_T) обеспечивает снижение дисперсии в 15 раз и ускорение расчётов на порядок.
- Рекомендуется использовать метод контрольной переменной для практического ценообразования.

Заключение. В рамках данной работы было проведено экспериментальное исследование ценообразования корзиночного опциона (basket option) на валютные пары CNY/RUB и USD/RUB с использованием метода Монте-Карло и методов снижения дисперсии. Выполнена реализация алгоритмов на Python на реальных рыночных данных за период с 3 апреля 2023 года по 31 декабря 2025.

В ходе работы успешно решены следующие задачи: изучены теоретические основы корзиночных опционов и метода Монте-Карло; реализованы методы снижения дисперсии (антитетические переменные и контрольная переменная на основе стоимости корзины); проведены численные эксперименты для числа траекторий от 1000 до 100000; выполнен сравнительный анализ методов по стандартной ошибке, коэффициенту снижения дисперсии и времени выполнения; сформулированы рекомендации по выбору эффективного метода для оценки корзиночных опционов.

Результаты показали, что метод контрольной переменной снижает дисперсию в 15 раз по сравнению со стандартным Монте-Карло, сокращая число траекторий на 93% и обеспечивая многократное ускорение достижения заданной точности. Метод антитетических переменных оказался неэффективным (снижение дисперсии около 1–3%).

Разработанное программное решение может служить основой для систем анализа рисков и хеджирования валютных позиций. Дальнейшее развитие включает исследование других методов снижения дисперсии и применение более сложных моделей ценообразования.