МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Изучение свойств операторов синк-аппроксимаций при приближении непрерывных функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 218 группы

направления **- 01.04.02 Прикладная математика и информатика**

механико-математического факультета

Жукова Сергея Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент А.Ю.Трынин

Заведующий кафедрой:
зав.кафедрой, д.ф.-м.н., доцент В.С.Рыхлов

Саратов 2026

Введение. Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств операторов интерполирования функции, которые тесно связаны с поведением синк-приближений

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f(\frac{k\pi}{n}),$$

представляющих собой сужение введенной Э.Борелем и Э.Т.Уиттекером кардинальной функции на отрезок $[0,\pi]$, используемых в теореме отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона.

Актуальность темы. При приближении непрерывных функций на отрезке с помощью синк-приближений вблизи концов отрезка возникает явление Уилбрейама-Гиббса, а также существуют непрерывные функции вида ряда из функций, для которых в заданной точке будет неограниченная расходимость. Кроме того, применение классического аппарата Фурье при решении смешанных краевых задач с линейными уравнениями второго порядка оказывается не всегда возможным, так как разложение в ряд Фурье функций, входящих в условие задачи, возможно сделать далеко не для всех функций, даже удовлетворяющих краевым условиям. В связи с этим предложены обобщения классических синк-приближений.

Целью магистерской работы исследование аппроксимативных свойств различных операторов, являющимися модификациями синк-приближений непрерывных функций на отрезке.

Объект исследования: аппроксимация непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции.

Предмет исследования: синк-аппроксимации.

Для достижения цели, поставленной в работе, поставлены **задачи**:

1. Получить операторы, обобщающие синк-аппроксимации;

2. Исследование аппроксимации непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции классическим способом и с применением модификации оператора и проведения численного эксперимента;

3. Исследование метода решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов с помощью модификации операторов и проведения численного эксперимента.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что модификации операторов позволяют получить усовершенствованный метод решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типа, сочетающий в себе достоинства классического аппарата Фурье и теории разностных схем.

Структура и содержание магистерской работы: Работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка использованных источников и трёх приложений.

В **первом** разделе приведены модикации операторов интерполирования лагранжева типа, с помощью которых возможно аппроксимировать произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.

Будем считать $LV[0,\pi]$ пространство функций f ограниченной вариации на $[0,\pi]$, исчезающих в нуле, с нормой $||f||_{LV[0,\pi]} = V_0^\pi[f]$, $\rho_\lambda \geq 0$, и для любого $\lambda \geq 0$ функция q_λ является произвольным элементом из шара $V_{\rho\lambda}[0,\pi]$ с радиусом $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda})$ в пространстве $LV[0,\pi]$, нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{1}$$

при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$:

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{2}$$

попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{3}$$

Определим оператор типа Лагранжа, построенный по решениям задачи Коши вида (1) или (2) и ставящий в соответсвие любой, определённой на отрезке $[0,\pi]$ функции f, интерполирующую её в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом

$$S_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda}\lambda)(x-x_{k,\lambda})}f(x_{k,\lambda})=\sum_{k=0}^{n}s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda}). \tag{4}$$

Рассмотрим оператор, ставящий в соответсвие любой, принимающей конечные значения на отрезке $[0,\pi]$ функции f, непрерывную функцию

$$T_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\{f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{5}$$

Если взять $q_\lambda\equiv 0$, $\lambda_n=n^2$, $h(\lambda_n)=n$, то операторы (4) в случае задачи Коши (1) превращаются в кардинальные функции Уиттекера

$$s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda})\equiv\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f(\frac{k\pi}{n}),\quad x_{k,\lambda}=\frac{k\pi}{n}.$$

На пространстве непрерывных на $[0,\pi]$ функций f определим операторы

$$A_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(s_{k-1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x))f(x_{k,\lambda}),$$

$$\widetilde{A}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k+1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}s(x_{k,\lambda}),$$

$$AT_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\}(s_{k-1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x))+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0),$$

$$\widetilde{AT}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\{\frac{f(x_{k+1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}-\frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k+1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}-$$

$$-f(0)\}s_{k,\lambda}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

Определим операторы другими парами номеров узлов и функций $s_{k,\lambda}$:

$$B_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(s_{k+1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x))f(x_{k,\lambda}),$$

$$\widetilde{B}_\lambda(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}s(x_{k,\lambda}),$$

$$BT_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\}(s_{k+1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x))+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0),$$

$$\widetilde{BT}_\lambda(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\{\frac{f(x_{k-1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}-\frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k-1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}-$$

$$-f(0)\}s_{k,\lambda}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

$$C_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(s_{k+1,\lambda}(x)+2s_{k,\lambda}(x)+s_{k-1,\lambda}(x))f(x_{k,\lambda}),$$

$$\widetilde{C}_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}s_{k,\lambda}(x)(f(x_{k+1,\lambda})+2f(x_{k,\lambda})+f(x_{k-1,\lambda})),$$

$$CT_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(s_{k+1,\lambda}(x)+2s_{k,\lambda}(x)+s_{k-1,\lambda}(x))\{f(x_{k,\lambda})-$$

$$-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0),$$

$$\widetilde{CT}_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}s_{k,\lambda}(x)\{f(x_{k+1,\lambda})+2f(x_{k,\lambda})+f(x_{k-1,\lambda})-$$

$$-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}(x_{k+1,\lambda}+2x_{k,\lambda}+x_{k-1,\lambda})-4f(0)\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

Полученные операторы не обладают интерполяционными свойствами как S_λ или T_λ, зато их аппроксимативные качества менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. Данные операторы позволяют аппроксимировать произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.

В **втором** разделе построен пример непрерывной, исчезающей на концах отрезка $[0,\pi]$ функции, с помощью которой можно построить непрерывную функцию, для которой приближение с помощью синк-приближений будет расходиться на всюду плотном множестве, приведён численный эксперимент с применением модификации оператора.

В **третьем** разделе приведён метод решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов с помощью модификации операторов и проведён численный эксперимент для задачи с однородными граничными условиями Дирихле и постоянным потенциалом.

Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + q(x,t)u = f(x,t), \tag{6}$$

$$u(0,t)\cos\alpha + u_x(0,t)\sin\alpha = 0, \tag{7}$$

$$u(\pi,t)\cos\beta + u_x(\pi,t)\sin\beta = 0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда потенциал q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda})$ задач Коши (1) или (2) $q_\lambda \equiv q^*$, а вместо непрерывно меняющегося параметра λ рассматриваем последовательность собственных значений $\lambda = \lambda_n$ и $h(\lambda) \equiv 1$, задана функция

$$s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})}, \tag{10}$$

где $y(x,\lambda)$ решения задач Коши (1) или (2) с нулями $x_{k,\lambda}$, перенумерованные согласно (3), тогда обозначим

$$l_{k,n}^{SL} \equiv s_{k,\lambda_n}. \tag{11}$$

Разделим переменные в однородном уравнении (6) смешанной краевой задачи (6) - (9), пусть $u(x,t) = U(x,t)V(t)$, получим систему уравнений, связанных спектральным параметром $\widehat{\lambda}$

$$U'' + [\widehat{\lambda} - q(x,t)]U = 0, \tag{12}$$
$$V' + \widehat{\lambda}(t)V = 0. \tag{13}$$

Воспользуемся граничными условиями (7), (8) для функции U, получим зависящую от параметра t регулярную задачу Штурма-Лиувилля

$$U'' + [\widehat{\lambda} - q(x,t)]U = 0, \tag{14}$$
$$U(0,t)\cos\alpha + U'(0,t)\sin\alpha = 0, \tag{15}$$
$$U(\pi,t)\cos\beta + U'(\pi,t)\sin\beta = 0. \tag{16}$$

Обозначим зависящие от параметра t собственные значения и соответсвующие им ортонормированные собственные функции задачи (14) - (16) $\widehat{\lambda}_m := \widehat{\lambda}_m(q,\alpha,\beta)$ и $U_m := U_m(q,\alpha,\beta,x)$, $m = 0,1,2...$ Коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи (14) - (16) функций (11) обозначим следующим образом

$$\tau_{k,n,m} = \int_0^\pi U_m(q,\alpha,\beta,\xi) l_{k,n}(\xi) d\xi, \tag{17}$$
$$\tau_m^{(0)} = \int_0^\pi U_m(q,\alpha,\beta,\xi) d\xi, \tag{18}$$
$$\tau_m^{(1)} = \int_0^\pi \xi U_m(q,\alpha,\beta,\xi) d\xi. \tag{19}$$

Легко видеть, что коэффициенты Фурье (17) - (19) не зависят ни от начального условия, ни от правой части (6). Они определяется только параметрами смешанной краевой задачи и могут быть определены заранее для каждой задачи вида (6) - (9). Рассмотрим частный случай оператора $AT_\lambda(f,x)$

$$AT_n^{SL}(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k,n}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n} - f(0)\}$$
$$\times(l_{k-1,n}^{ST}(x) + l_{k,n}^{ST}(x)) + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0), \tag{20}$$

где фундаментальные функции $l_{k,n}^{ST}$ определены в (11). Далее через

$$\widehat{AT}_{n,m}^{SL}[f] := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\tau_{k-1,n,m}+\tau_{k,n,m})\{f(x_{k,n})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n}-f(0)\}+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\tau_m^{(1)}+f(0)\tau_m^{(0)} \tag{21}$$

обозначим коэффициенты Фурье значения оператора (20), для произвольной функции $f\in C[0,\pi]$. Пусть далее

$$\nu_n=\begin{cases}-e^{-\lambda_n}(AT_n^{SL}(f,0)ctg(\alpha)+AT_n^{SL'}(f,0)) \text{ при } \alpha\neq\pi m_1, m_1\in\mathbb{Z},\\ AT_n^{SL}(f,0) \text{ при } \alpha=\pi m_1, m_1\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

$$\widetilde{\nu}_n=\begin{cases}-e^{-\lambda_n}(AT_n^{SL}(f,\pi)ctg(\beta)+AT_n^{SL'}(f,\pi)) \text{ при } \beta\neq\pi m_2, m_2\in\mathbb{Z},\\ AT_n^{SL}(f,\pi) \text{ при } \beta=\pi m_2, m_2\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

$$\mu_n=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_n}.$$

На множестве функций f заданных в $\{x_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$ определим операторы

$$\eta(x,\lambda_n)=\begin{cases}2\sqrt{\frac{1}{3}}\nu_n\mu_n x \text{ при } x\in[0,\frac{1}{|\mu_n|}(\frac{\sqrt{2}}{3})], \alpha\neq\pi m_1, m_1\in\mathbb{Z},\\ \nu_n\sin^3(\mu_n(x+\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}))) \text{ при}\\ x\in[\frac{1}{|\mu_n|}(\frac{\sqrt{2}}{3}),\frac{\pi}{|\mu_n|}-\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3})], \alpha\neq\pi m_1, m_1\in\mathbb{Z},\\ \nu_n(\frac{\pi}{|\mu_n|}-\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}))^{-3}(x-\frac{\pi}{|\mu_n|}+\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}))^3 \text{ при}\\ x\in[0,\frac{\pi}{|\mu_n|}-\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3})], \alpha=\pi m_1, m_1\in\mathbb{Z},\\ 0 \text{ при } x\in[\frac{\pi}{|\mu_n|}-\frac{1}{|\mu_n|}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}),\pi],\end{cases}$$

$$\widetilde{\eta}(x,\lambda_n)=-\begin{cases}2\sqrt{\frac{1}{3}}\widetilde{\nu}_n\mu_n(\pi-x) \text{ при } x\in[\pi-\frac{1}{\mu_n}(\frac{\sqrt{2}}{3}),\pi],\beta\neq\pi m_2, m_2\in\mathbb{Z},\\ \widetilde{\nu}_n\sin^3(\mu_n(\pi-x+\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}))) \text{ при}\\ x\in[\pi-\frac{\pi}{\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}),\pi-\frac{1}{\mu_n}(\frac{\sqrt{2}}{3})],\beta\neq\pi m_2, m_2\in\mathbb{Z},\\ \widetilde{\nu}_n(\frac{\pi}{\mu_n}-\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}))^{-3}(\pi-\frac{\pi}{\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3})-x)^3 \text{ при}\\ x\in[\pi-\frac{\pi}{\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}),\pi],\beta=\pi m_2, m_2\in\mathbb{Z},\\ 0 \text{ при } x\in[0,\pi-\frac{\pi}{\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3})].\end{cases}$$

Обозначим коэффециенты Фурье значений операторов $\eta(x,\lambda_n)$ и $\widetilde{\eta}(x,\lambda_n)$ по собственным функциям задачи (14) - (16) как

$$\widehat{\eta}_{\lambda_n,m}=\int_0^\pi U_m(q,\alpha,\beta,\xi)\eta(\xi,\lambda_n)d\xi, \tag{22}$$

$$\widehat{\widetilde{\eta}}_{\lambda_n,m}=\int_0^\pi U_m(q,\alpha,\beta,\xi)\widetilde{\eta}(\xi,\lambda_n)d\xi. \tag{23}$$

Операторы, ставящие в соответвие функции $f\in C[0,\pi]$ частичные суммы Фурье функции $AT_n^{SL}(f,x)+\eta(x,\lambda_n)+\widetilde{\eta}(x,\lambda_n)$ обозначим

$$\mathbb{AT}_{n,m}^{SL}(f,x)=\sum_{m=0}^{j}\widehat{AT}_{n,m}^{SL}[f,\eta]\widehat{U}_m(q,\alpha,\beta,x), \tag{24}$$

где

$$\widehat{AT}_{n,m}^{SL}[f,\eta]:=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\tau_{k-1,n,m}+\tau_{k,n,m})\{f(x_{k,n})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n}-f(0)\}+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\tau_m^{(1)}+f(0)\tau_m^{(0)}+\widehat{\eta}_{\lambda_n,m}+\widehat{\widetilde{\eta}}_{\lambda_n,m} \tag{25}$$

являются её коэффициентами Фурье. Функция $AT_n^{SL}(f,x)+\eta(x,\lambda_n)+\widetilde{\eta}(x,\lambda_n)$ имеет абсолютно непрерывную производную на отрезке $[0,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (7), (8). Основным результатом работы является следующая теорема, позволяющая решать смешанную краевую задачу для уравнения параболического типа с помощью модифицированных операторов.

Теорема 1. Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, функции f, φ являются непрерывными, каждая на своей области определения, и непрерывная по переменной t неотрицательная функция q при каждом неотрицательном t имеет ограниченную вариацию по переменной x на отрезке $x \in [0, \pi]$, для которой

$$V_0^\pi[q_\lambda(\cdot, t)] = o(\frac{\sqrt{t}}{\ln t}), \quad t \to \infty,$$

функция $j(n)$, принимает целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению

$$[n^{2(1+\varepsilon)} + 1] \leq j(n) \leq \infty. \tag{26}$$

Тогда обобщенное решение смешанной краевой задачи (6) - (9) представимо в виде

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{j(n)} (\widehat{AT}_{n,m}^{SL}[\varphi, \eta] e^{-\int_0^t \lambda_m(\tau) d\tau} +$$

$$+ \int_0^t \widehat{AT}_{n,m}^{SL}[f(\cdot, \zeta), \eta] e^{\int_t^\zeta \lambda_m(\tau) d\tau} d\zeta) U_m(q, \alpha, \beta, x). \tag{27}$$

Сходимость в (27) равномерная на прямоугольнике $[\sigma_1\widetilde{\varepsilon}, \pi - \widetilde{\sigma_1}\widetilde{\varepsilon}] \times [0, T]$, где

$$\sigma_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } (\alpha = \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \wedge f(0) \neq 0, \\ 0 \text{ при } (\alpha \neq \pi m_1, m_1 \in \mathbb{Z}) \vee f(0) = 0. \end{cases}$$

$$\widetilde{\sigma_1} = \begin{cases} 1 \text{ при } (\beta = \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \wedge f(\pi) \neq 0, \\ 0 \text{ при } (\beta \neq \pi m_2, m_2 \in \mathbb{Z}) \vee f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Построенный метод позволяет также получить решение для уравнения гиперболического типа. Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x,t)u = f(x,t), \tag{28}$$

$$u(0,t)\cos\alpha + u_x(0,t)\sin\alpha = 0, \tag{29}$$

$$u(\pi,t)\cos\beta + u_x(\pi,t)\sin\beta = 0, \tag{30}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{31}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \tag{32}$$

где $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, при $T > 0$, f, φ, ψ являются непрерывными, каждая на своей области определения. Удовлетворение граничным условиям (29), (30) функциями f, φ, ψ не предполагается.

Теорема 2. Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, функции f, φ, ψ являются непрерывными, каждая на своей области определения, и непрерывная по переменной t неотрицательная функция q при каждом неотрицательном t имеет ограниченную вариацию по переменной x на отрезке $x \in [0,\pi]$, для которой

$$V_0^{\pi}[q_\lambda(\cdot,t)] = o(\frac{\sqrt{t}}{\ln t}), \quad t \to \infty,$$

функция $j(n)$, принимает целые значения или бесконечность, удовлетворяет соотношению

$$[n^{2(1+\varepsilon)} + 1] \leq j(n) \leq \infty. \tag{33}$$

Тогда обобщенное решение смешанной задачи (28) - (32) представимо в виде

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{j(n)} (\widehat{AT}_{n,m}[\varphi,\eta] \cos\sqrt{\widehat{\lambda}_m} t + \frac{\widehat{AT}_{n,m}[\psi,\eta]}{\sqrt{\widehat{\lambda}_m}} \sin\sqrt{\widehat{\lambda}_m} t +$$

$$+ \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\widehat{\lambda}_m}(t-\tau)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_m}} \widehat{AT}_{n,m}[f(\cdot,\tau),\eta] d\tau) \widehat{U}_m(q,\alpha,\beta,x). \tag{34}$$

Сходимость в (34) равномерная на прямоугольнике $[\sigma_1\widetilde{\varepsilon}, \pi - \widetilde{\sigma_1}\widetilde{\varepsilon}] \times [0,T]$.

В **приложениях** досупны исходные коды программной реализации.

Заключение. В данной работе была изложена теория модификации операторов, с помощью которых можно аппроксимировать произвольную непрерывную фунукцию, а также изложен метод решения смешанной краевой задачи для уравнения параболического и гиперболического типов.

На основании проведённых численных экспериментов можно сделать вывод, что модифицированные операторы позволяют справиться с резонансом, явлением Уилбрейама-Гиббса и всплеском погрешности.