

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Применение операционного метода в теории функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 227 группы

направление **02.04.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Макаровой Полины Алексеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор
Д.В.Прохоров

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент
Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Теория функций комплексного переменного является одним из фундаментальных разделов математического анализа. Методы комплексного анализа широко применяются при исследовании интегральных преобразований, дифференциальных уравнений, специальных функций, а также в задачах математической физики.

Одним из методов, тесно связанных с интегральными представлениями и специальными функциями, является операционный метод. Его основная идея заключается в переходе от исходной функции к её образу с помощью интегрального преобразования, после чего многие аналитические операции сводятся к более простым алгебраическим операциям. Наиболее известным инструментом операционного метода является преобразование Лапласа.

Среди специальных функций особое место занимает гамма-функция Эйлера. Она возникает при исследовании степенных функций в рамках преобразования Лапласа, служит естественным обобщением факториала на случай вещественного и комплексного аргумента и обладает богатой системой аналитических свойств.

Целью работы является исследование применения операционного метода в теории функций комплексного переменного на примере гамма-функции Эйлера, а также аналитическое и численное изучение поведения гамма-функции при комплексном аргументе.

Объект исследования — методы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления.

Предмет исследования — гамма-функция Эйлера как функция комплексного переменного, её интегральное представление и траектории на плоскости значений при параметрическом задании аргумента.

Для достижения цели поставлены следующие **задачи**:

- рассмотреть основные понятия теории функций комплексного переменного;
- раскрыть сущность операционного метода и рассмотреть преобразование Лапласа и его основные свойства;
- исследовать гамма-функцию Эйлера и её основные свойства;

- провести вычислительный эксперимент, вычислить значения $\Gamma(z(\varphi))$ для заданного набора значений r и построить графики траекторий на плоскости значений.

Практическая значимость работы состоит в том, что её результаты могут быть использованы при изучении комплексного анализа, специальных функций и интегральных преобразований, а также в учебной практике при демонстрации применения аналитических и вычислительных методов к исследованию функций комплексного переменного.

Структура и содержание магистерской работы. Работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основное содержание работы. В первом разделе рассмотрены элементы теории функций комплексного переменного, необходимые для дальнейшего исследования.

Вводится понятие комплексного числа

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1,$$

его сопряжённого

$$\bar{z} = x - iy$$

и модуля

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для $z \neq 0$ используется тригонометрическая и показательная формы записи:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z,$$

причём формула Эйлера имеет вид

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Далее рассматриваются функции комплексного переменного $f : D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$w = f(z), \quad z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

и вводятся определения предела и непрерывности:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad f \text{ непрерывна в } z_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Определяется производная функции комплексного переменного:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

и формулируются условия Коши–Римана, необходимые для комплексной дифференцируемости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Функция, дифференцируемая во всех точках области, называется аналитической в этой области.

Также в первом разделе рассмотрено интегрирование по комплексной переменной. Пусть γ — кусочно-гладкая кривая с параметризацией $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Интеграл по кривой определяется формулой

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Приводится оценка (ML-неравенство): если на γ выполнено $|f(z)| \leq M$, а длина кривой равна L , то

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML.$$

Формулируется теорема Коши: если f аналитична в односвязной области D , то для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Как следствие приводится интегральная формула Коши: если f аналитична внутри и на границе области, ограниченной простой замкнутой поло-

жительно ориентированной кривой γ , а z_0 лежит внутри, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

а для производных:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Отдельное внимание уделено рядам, особым точкам и вычетам. Приводится ряд Тейлора: если f аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Если же f аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то она разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Коэффициент c_{-1} называется вычетом:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Формулируется теорема о вычетах: если f аналитична в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, \dots, z_n внутри положительно ориентированного замкнутого контура γ , и f аналитична на γ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Данный аппарат используется далее при описании аналитической природы гамма-функции после её продолжения на комплексную плоскость.

Во втором разделе рассматривается операционный метод. В начале раздела раскрывается его сущность как способа перехода от исходной функции (оригинала) к её образу (изображению) с помощью интегрального преобра-

зования, после чего дифференциальные и интегральные операции сводятся к более простым алгебраическим преобразованиям.

Вводится понятие оригинала $f(t)$ и указывается, что в операционном методе рассматриваются функции, удовлетворяющие стандартным условиям (кусочная гладкость, нулевые значения при $t < 0$ и рост не быстрее экспоненты):

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

Далее определяется изображение по Лапласу (при $p = s + i\sigma$):

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Отмечается, что для любого оригинала $F(p)$ определено и аналитично в полуплоскости

$$\Re p > s_0.$$

Приводится формула обращения (интеграл Бромвича): для $a > s_0$ справедливо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Тем самым оригинал определяется изображением (с точностью до значений в точках разрыва).

Далее перечисляются основные свойства преобразования Лапласа. В частности, линейность:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \iff \alpha F(p) + \beta G(p),$$

теорема подобия (при $\alpha > 0$):

$$f(\alpha t) \iff \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

дифференцирование оригинала:

$$f'(t) \iff pF(p) - f(0), \quad f^{(n)}(t) \iff p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

а также интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \iff \frac{F(p)}{p}.$$

Указываются также сдвиговые соотношения:

$$f(t - \tau) \iff e^{-p\tau} F(p), \quad e^{p_0 t} f(t) \iff F(p - p_0).$$

Особое внимание уделяется образу степенной функции, непосредственно связывающему операционный метод с гамма-функцией Эйлера:

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(p) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \Re(\alpha) > -1, \quad \Re p > 0.$$

Именно эта формула служит отправной точкой для введения гамма-функции в третьем разделе работы.

В заключительной части второго раздела рассматриваются теоремы разложения в операционном методе, позволяющие восстанавливать оригинал по изображению. В частности, при мероморфности $F(p)$ вычисление обратного преобразования сводится к применению теоремы о вычетах к функции $e^{pt} F(p)$ в её особых точках, что демонстрирует тесную связь операционного метода с методами комплексного анализа.

В третьем разделе рассматривается применение операционного метода на примере гамма-функции Эйлера. Показано, что гамма-функция возникает при вычислении преобразования Лапласа степенной функции. Для $f(t) = t^{z-1}$ при $\Re p > 0$, $\Re z > 0$ имеем

$$\mathcal{L}\{t^{z-1}\}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^{z-1} dt.$$

После замены $u = pt$ получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{z-1} dt = p^{-z} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du = \frac{\Gamma(z)}{p^z},$$

где гамма-функция задаётся интегралом Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0.$$

Исследуются условия сходимости интеграла Эйлера и выводится функциональное уравнение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

а также связь с факториалом

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Отмечается, что после аналитического продолжения $\Gamma(z)$ является мероморфной функцией на \mathbb{C} и имеет простые полюса в точках

$$z = 0, -1, -2, \dots,$$

причём вычеты в полюсах равны

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Практическая часть работы посвящена вычислительному эксперименту. Рассматривается параметрическое задание комплексного аргумента

$$z(\varphi) = 1 + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 1 + re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad r \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\}.$$

Показывается, что при фиксированном r точка $z(\varphi)$ описывает верхнюю полуокружность радиуса r с центром в точке 1 комплексной плоскости. Кро-

ме того,

$$\Re z(\varphi) = 1 + r \cos \varphi \geq 1 - r > 0,$$

поэтому на всей траектории применимо интегральное представление Эйлера.

На рисунке 1 представлены полуокружности $z(\varphi) = 1 + re^{i\varphi}$ на плоскости аргумента.

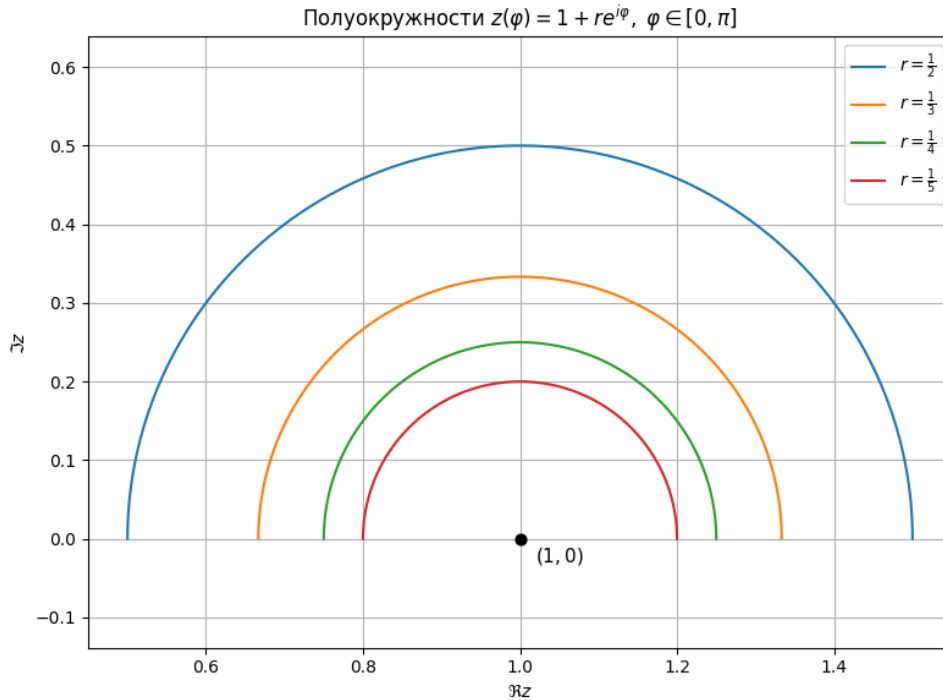


Рисунок 1 — Полуокружности на плоскости аргумента

Подставляя $z(\varphi)$ в интеграл Эйлера и преобразуя степень $t^{ir \sin \varphi}$ по формуле $t^{i\beta} = e^{i\beta \ln t}$, получаем представление

$$\Gamma(z(\varphi)) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r \cos \varphi} \left(\cos(r \sin \varphi \ln t) + i \sin(r \sin \varphi \ln t) \right) dt.$$

Из этого равенства выделяются действительная и мнимая части:

$$\Re \Gamma(z(\varphi)) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r \cos \varphi} \cos(r \sin \varphi \ln t) dt,$$

$$\Im\Gamma(z(\varphi)) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{r \cos \varphi} \sin(r \sin \varphi \ln t) dt.$$

Тем самым траектория гамма-функции на плоскости значений задаётся параметрически:

$$\Gamma(z(\varphi)) = U_r(\varphi) + iV_r(\varphi),$$

$$U_r(\varphi) = \Re\Gamma(z(\varphi)), \quad V_r(\varphi) = \Im\Gamma(z(\varphi)).$$

Для численного исследования был использован язык программирования Python в среде Google Colab. В ходе вычислительного эксперимента для каждого r и набора значений $\varphi = \varphi_n$ вычислялись точки $z(\varphi_n)$ и соответствующие значения $\Gamma(z(\varphi_n))$, после чего строились траектории на плоскости значений, соответствующие рисунку 2 и графики $\Re\Gamma(z(\varphi))$, $\Im\Gamma(z(\varphi))$ как функции параметра φ , соответствующие рисункам 3- 4.

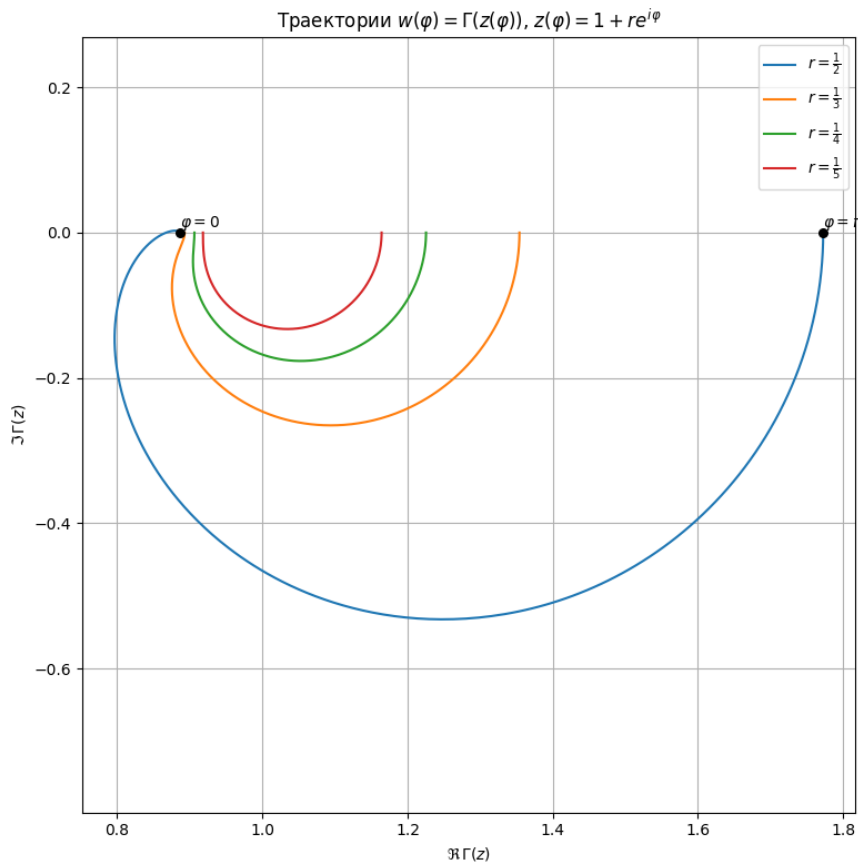


Рисунок 2 — Траектории $\Gamma(z(\varphi))$ на плоскости значений

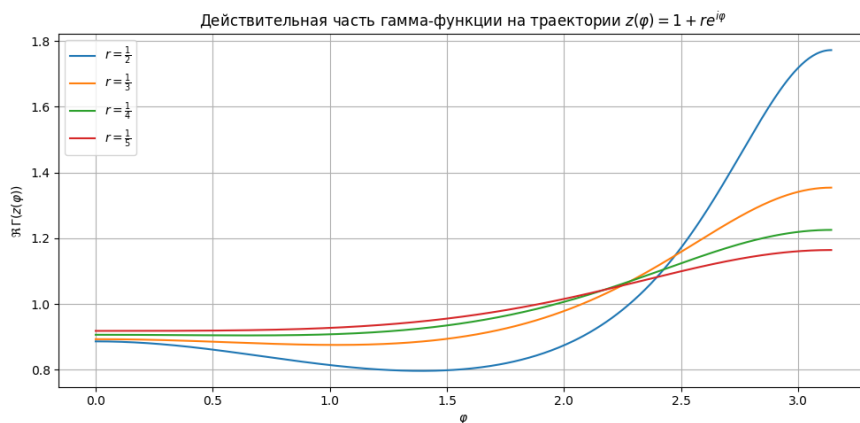


Рисунок 3 — Графики $\Re\Gamma(z(\varphi))$ как функции параметра φ

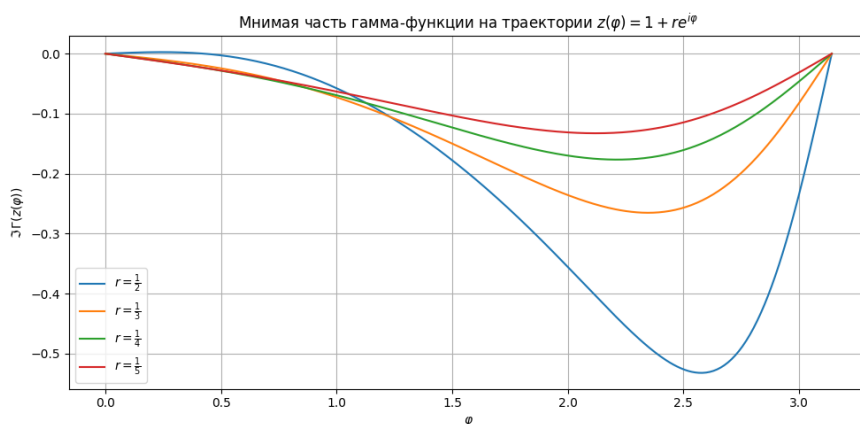


Рисунок 4 — Графики $\Im\Gamma(z(\varphi))$ как функции параметра φ

Для контроля корректности вычислений приведены табличные значения при $r = \frac{1}{2}$, представленные в таблице 1.

Таблица 1 — Контрольные значения $\Gamma(z(\varphi))$ при $r = \frac{1}{2}$

| φ | $z(\varphi)$ | $\Re\Gamma(z(\varphi))$ | $\Im\Gamma(z(\varphi))$ |
|------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | $1.500000 + 0.000000 i$ | 0.886227 | 0.000000 |
| $\frac{\pi}{4}$ | $1.353553 + 0.353553 i$ | 0.833669 | -0.026044 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1.000000 + 0.500000 i$ | 0.801694 | -0.199640 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $0.646447 + 0.353553 i$ | 1.050954 | -0.491374 |
| π | $0.500000 + 0.000000 i$ | 1.772454 | 0.000000 |

Заключение В магистерской работе было рассмотрено применение операционного метода в теории функций комплексного переменного на примере гамма-функции Эйлера.

В теоретической части изложены основные положения теории функций комплексного переменного, необходимые для дальнейшего исследования, а также аппарат операционного метода, основанный на преобразовании Лапласа.

Показано, что гамма-функция возникает при вычислении преобразования Лапласа степенной функции t^{z-1} . С использованием функционального уравнения и аналитического продолжения установлено, что $\Gamma(z)$ является мероморфной функцией на \mathbb{C} с простыми полюсами в точках $0, -1, -2, \dots$, и получена формула для вычетов в этих полюсах. Также приведены представления Вейерштрасса и формула отражения.

Практическая часть включала вычислительный эксперимент для отображения $w = \Gamma(z)$ при

$$z(\varphi) = 1 + re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Построены траектории $\Gamma(z(\varphi))$ на плоскости значений и графики $\Re\Gamma(z(\varphi)), \Im\Gamma(z(\varphi))$. Численные результаты показывают, что гамма-функция существенно искажает исходные полуокружности на плоскости аргумента; при уменьшении r образы траекторий визуально сжимаются, а наибольшие изменения наблюдаются при $r = \frac{1}{2}$. Программная реализация вычислительного эксперимента приведена в приложениях А-Д.

Цель работы достигнута: исследованы свойства гамма-функции Эйлера, связанные с операционным методом, и выполнено численное моделирование её поведения при комплексном параметрическом задании аргумента.