

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Многочленная интерполяция

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 218 группы

направления - **01.04.02 Прикладная математика и информатика**

механико-математического факультета

Куликовой Светланы Витальевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

Ю.В. Матвеева

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию кубических сплайнов. Данный выбор обусловлен их свойствами: они обеспечивают нужную для практики гладкость и при этом допускают экономичные алгоритмы, в отличие от сплайнов более высоких порядков.

Цель работы заключается в теоретическом и численном исследовании методов интерполяции кубическими сплайнами на прямоугольных и треугольных сетках, а также в программной реализации соответствующих алгоритмов.

В соответствии с целью были определены следующие **задачи**:

1. Изучить одномерный случай кубического сплайна.
2. Исследовать двумерный кубический сплайн на прямоугольной и треугольной сетках.
3. Сформулировать алгоритмы построения двумерного кубического сплайна для каждого типа сетки.
4. Реализовать алгоритмы программно и провести численные эксперименты на тестовых функциях.

Научная новизна состоит в сравнительном анализе двух подходов к двумерной кубической сплайн-интерполяции – на прямоугольных и треугольных сетках.

Практическая значимость данной работы заключается в программной реализации алгоритмов двумерной кубической сплайн-интерполяции на прямоугольных и треугольных сетках. На основе полученных результатов могут быть построены усовершенствованные вычислительные методы.

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы и трёх приложений.

В первом разделе исследуются одномерные кубические сплайны: выводится система линейных уравнений для коэффициентов, доказываются существование и единственность сплайна, приводятся оценки погрешности интерполяции. Для практической реализации используется метод прогонки решения трёхдиагональной системы.

Во втором разделе рассматриваются двумерные кубические сплайны на прямоугольных сетках, построенные как тензорное произведение одномерных сплайнов. Приводятся различные типы краевых условий, описывается

алгоритм построения с оценкой вычислительной трудоемкости, а также даются оценки погрешности интерполяции. На примере двух тестовых функций демонстрируются достоинства метода и его недостатки.

В третьем разделе исследуется интерполяция кубическими сплайнами на треугольных сетках. Подробно анализируется способ задания дополнительного условия для однозначного определения полинома 3 степени на треугольнике. Для различных способов вывода дополнительного условия выводятся оценки погрешности. Проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические выводы.

Одномерные кубические сплайны. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Рассмотрим сетку узлов $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$; обозначим расстояние между смежными узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Назовем **кубическим сплайном** функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ на сетке функцию $S(x)$, удовлетворяющую условиям:

1. на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени;
2. функция, ее первая $S'(x)$ и вторая $S''(x)$ производные непрерывны на отрезке $[a, b]$;
3. в узлах интерполяции сплайн принимает значения интерполируемой функции: $S(x_i) = f(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.
4. на концах сегмента $[a, b]$ вторая производная функции $S''(x)$ удовлетворяет условиям $S''(a) = S''(b) = 0$.

Замечание 1. На концах сегмента $[a, b]$, в принципе, могут быть заданы и другие условия, например, $S''(a) = A$, $S''(b) = B$.

Теорема 1. Существует единственный сплайн $S(x)$, удовлетворяющий всем условиям 1-4 из определения.

Теорема 2. Для функции $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ справедливы оценки

$$\|f(x) - S_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^4, \quad \|f'(x) - S'_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^3, \\ \|f''(x) - S''_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^2, \quad M_4 = \left\| f^{(4)}(x) \right\|_{C[a,b]},$$

где $\|g(x)\|_{C[a,b]} = \max_{[a,b]} |g(x)|$ – норма, введенная в линейном пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$.

Из этих оценок следует, что при $h \rightarrow 0$ (т. е. при $n \rightarrow \infty$) последовательности $S_h(x)$, $S'_h(x)$, $S''_h(x)$ сходятся соответственно к функциям $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

Теорема 3. Для всех $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ справедлива оценка

$$\|f'' - S''\|_{\Omega_n} \leq \frac{3}{4}M_4h^2.$$

В работе приведены практические примеры построения сплайнов на языке Python с использованием метода прогонки, подтверждающие теоретические результаты.

Двумерные кубические сплайны на прямоугольных сетках.

Пусть в области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ введена сетка $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d$. На этой сетке рассматриваются кубические сплайны дефекта 1 от двух переменных (класса $C^{2,2}[\Omega]$). В ячейке $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ они имеют вид

$$S(x, y) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 a_{\alpha\beta}^{ij} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta. \quad (1)$$

Множество таких сплайнов $S_{3,3,1,1}(\Delta)$ рассматривается как тензорное произведение пространств одномерных сплайнов $S_{3,1}(\Delta_x)$ и $S_{3,1}(\Delta_y)$ размерностей $N + 3$ и $M + 3$ соответственно, и размерность пространства $S_{3,3,1,1}(\Delta)$ равна $(N + 3) \times (M + 3)$.

Пусть в узлах сетки Δ заданы значения функции f_{ij} . **Интерполяционным кубическим сплайном двух переменных** называется сплайн, принимающий на сетке Δ значения

$$S(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M. \quad (2)$$

Это дает $(N+1) \times (M+1)$ условий. Недостающие $2(N+M+4)$ ограничений задаются в виде краевых условий.

Как и в случае одной переменной, будем рассматривать условия четырех типов: I тип (значения первых и смешанных производных на границе), II тип (значения вторых и четвёртых смешанных производных), III тип (пери-

одические), IV тип (условия, обеспечивающие непрерывность более высоких производных вблизи границы).

Теорема 4. Интерполяционный кубический сплайн двух переменных, удовлетворяющий условиям (2.2) и одному из типов краевых условий I-IV, существует и единствен.

Кроме перечисленных, возможны и смешанные краевые условия, т. е. условия разных типов по разным переменным. При этом, если по одной из них, например по x , заданы условия типа I, а по другой – y типа II, то в вершинах прямоугольника, точках (x_i, y_j) , $-i = 0, N; j = 0, M$, должны задаваться смешанные производные $D^{(1,2)}S(x_i, y_j)$.

Методика получения оценок погрешности интерполяции локальными кубическими сплайнами двух переменных состоит в том, чтобы использовать оценки погрешности для сплайнов одной переменной.

Теорема 5. Если $f(x, y) \in W_{\infty}^4[\Omega]$ и интерполяционный кубический сплайн $S(x, y)$ удовлетворяет краевыми условиями одного из типов I, II, III, то

$$\begin{aligned} \|D^{r,s}\{S(x, y) - f(x, y)\}\|_{\infty} &\leq A_{r,s}^{(1)}\bar{h}^{4-r-s}\|D^{4-s,s}f(x, y)\|_{\infty} + \\ &+ A_{r,s}^{(2)}\bar{l}^{4-r-s}\|D^{r,4-r}f(x, y)\|_{\infty} + A_{r,s}^{(3)}\bar{h}^{2-r}\bar{l}^{2-s}\|D^{2,2}f(x, y)\|_{\infty}, \quad (3) \\ r + s &\leq 2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{r,s}^{(1)} &= A_{s,r}^{(2)}, & A_{0,0}^{(1)} &= 5/384, & A_{1,1}^{(1)} &= 4/27, \\ A_{0,1}^{(1)} &= 1/24, & A_{0,2}^{(1)} &= 3/8, & A_{1,0}^{(1)} &= 81/864, & A_{2,0}^{(1)} &= 13/48, \\ A_{0,0}^{(3)} &= 0,073349, & A_{1,1}^{(3)} &= 0,74354, & A_{1,0}^{(3)} &= A_{0,1}^{(3)} = 0,23353, \\ A_{0,2}^{(3)} &= A_{2,0}^{(3)} = 13/6. \end{aligned}$$

Теорема 6. Если $f(x, y) \in C^{2,2}W_{\Delta,\infty}^{4,4}[\Omega]$ и интерполяционный сплайн $S(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям одного из типов I, II, III, то

$$\begin{aligned} & \|D^{r,s}\{S(x, y) - f(x, y)\}\|_{\infty} \leq \\ & \leq K_r^{(1)}\bar{h}^{4-r} \|D^{4,s}f(x, y)\|_{\infty} + K_s^{(2)}\bar{l}^{4-s} \|D^{r,4}f(x, y)\|_{\infty} + \\ & + K_r^{(1)}K_s^{(2)}\bar{h}^{4-r}\bar{l}^{4-s} \|D^{4,4}f(x, y)\|_{\infty}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} K_0^{(1)} = K_0^{(2)} &= 5/384, \quad K_1^{(1)} = K_1^{(2)} = 1/24, \quad K_2^{(1)} = K_2^{(2)} = 3/8, \\ K_3^{(1)} &= (1 + \beta_1)/2, \quad K_3^{(2)} = (1 + \beta_2)/2, \\ \beta_1 &= \bar{h}/\min_i h_i, \quad \beta_2 = \bar{l}/\min_j l_j. \end{aligned}$$

Для реализации алгоритма использовался язык Python с библиотеками NumPy и SciPy.

Пример 1. Визуализация, представленная на рисунке 1, показывает гладкую поверхность, хорошо аппроксимирующую функцию $\sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Максимальная ошибка интерполяции для выбранной сетки 5×5 не превышает порядок 10^{-3} , что подтверждает точность и устойчивость кубического сплайна.

Сплайн функции $\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ (сетка 5×5)

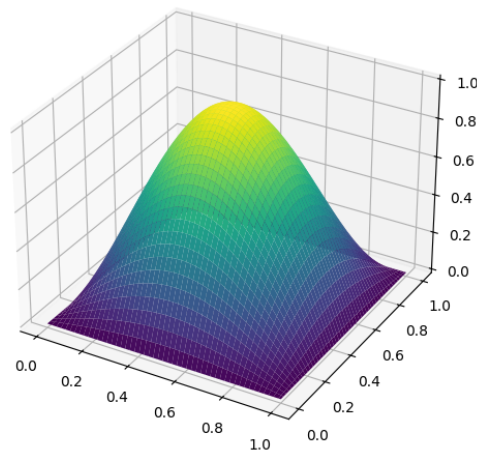


Рисунок 1 — Кубический сплайн двух переменных для $\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

Пример 2. Визуализация, представленная на рисунке 2, показывает сильные искажения поверхности, которая не способна адекватно аппроксимировать функцию $\sin(10\pi x) \sin(10\pi y)$. Максимальная ошибка интерполяции для выбранной сетки 5×5 имеет порядок единицы 10^0 , что свидетельствует о непригодности кубического сплайна на прямоугольной сетке для восстановления такой высокочастотной функции.

Сплайн функции $\sin(10\pi x)\sin(10\pi y)$ (сетка 5×5)

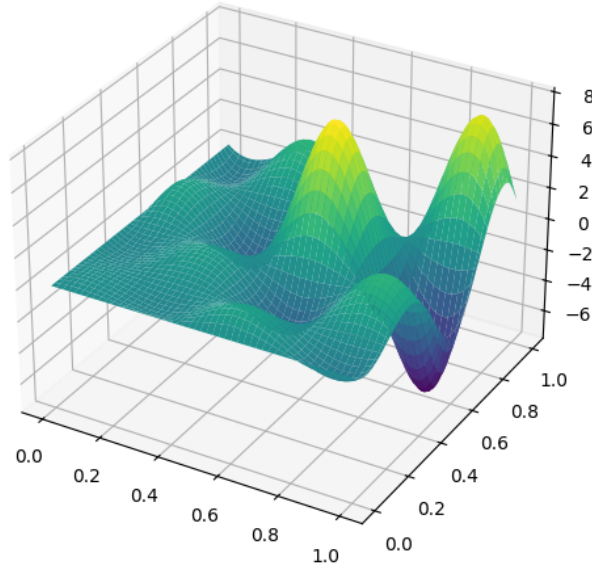


Рисунок 2 — Кубический сплайн двух переменных для $\sin(10\pi x)\sin(10\pi y)$

Аппарат двумерных кубических сплайнов на прямоугольных сетках является эффективным инструментом для интерполяции функций, заданных на областях, имеющих форму прямоугольника или объединения прямоугольников. Однако применение таких сеток к областям с криволинейными границами связано с трудностями. Это неизбежно вносит дополнительные погрешности и усложняет реализацию этих условий. Кроме того, прямоугольные сетки обладают низкой адаптивностью. Таким образом, указанные недостатки приводят к необходимости использования неструктурированных сеток, наиболее простыми и гибкими из которых являются треугольные сетки (триангуляции).

Интерполяция кубическими сплайнами на треугольных сетках. Пусть Δ – невырожденный треугольник в \mathbb{R}^2 . Через a_i ($i = 1, 2, 3$) будем обозначать вершины треугольника Δ , через n_i – единичную нормаль к сто-

роне $[a_i, a_{i+1}]$, σ_i – единичный вектор, направленный от a_i к a_{i+1} ($a_4 = a_1$), через α, β, θ – углы при вершине a_1, a_2, a_3 соответственно; при этом пусть выполняются неравенства $0 < \alpha \leq \beta \leq \theta < \pi$.

Будем считать, что вершины Δ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leq b$. В таком случае сторона $[a_1, a_2]$ лежит на оси Ox , а высота, опущенная из вершины a_3 , совпадает с осью Oy . Длина стороны $[a_1, a_2]$ равна $a + b = H$, что является наибольшей стороной треугольника Δ . Для дальнейших оценок погрешности потребуется характеризовать форму треугольника, удобно ввести величину $\gamma(\varphi) = \max\{1, \operatorname{ctg} \varphi\}$, где φ – минимальный угол треугольника.

Обозначим через $P_3(x, y) = P_3(f; x, y)$ искомый интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит 3. Для его однозначного определения в классической постановке используются следующие 9 условий, обеспечивающие непрерывность самого решения ($C^{(0)}$) на границах треугольников

$$f(a_i) = P_3(a_i) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a_i) = \frac{\partial}{\partial x} P_3(a_i) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a_i) = \frac{\partial}{\partial y} P_3(a_i) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (7)$$

где уравнения (5) представляют собой значения в вершинах треугольника и дают 3 условия, а уравнения (6) и (7) – значения первых производных в вершинах, это 6 условий. Этих 9 условий достаточно для единственности полинома 2-ой степени. Для полинома 3-ей степени, имеющего 10 коэффициентов, одного условия не хватает.

Выбор этого дополнительного условия является ключевым моментом, определяющим свойства интерполянта, и будет варьироваться. Проведенный анализ способов задания дополнительного условия показывает, что сам по себе интерполяционный многочлен 3-ей степени не гарантирует равномерно хорошей аппроксимации на вырождающихся треугольниках. По результатам анализа способов задания десятого условия можно сделать следующие выводы:

- Способы 1–3, 11–21 (за исключением специальных подобластей, например A_1, A_2 и др., где зависимость может ослабевать) дают оценки, содержащие $\gamma(\beta)$ или произведение $\gamma(\alpha)\gamma(\beta)$, что делает их чувствительными к малым углам.
- Способы 4–9 в зависимости от выбора точки (x_0, y_0) могут давать как оценки с $\gamma(\beta)$, так и с $\gamma(\alpha)$ (более устойчивые).
- Способ 10 (интегральное условие) и способ 8 при $(x_0, y_0) \in A_4$ приводят к оценкам только с $\gamma(\alpha)$, что наиболее предпочтительно для практики.

Таким образом, качество аппроксимации определяется тем, как именно доопределяется многочлен, а именно – попадает ли точка задания дополнительного условия в области, приводящие к неблагоприятной зависимости от наименьшего угла.

Полученные результаты можно представить в виде теорем.

Теорема 7. Существуют абсолютные положительные константы $C_{i,j}$ такие, что для любой функции $f \in W^4M$ и любого невырожденного треугольника Δ , любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена, заданного условиями (3.1) – (3.3) и одним из условий:

- 1) $\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 P_3(x_0, y_0)}{\partial y^3}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta$;
 - 2) $\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 P_3(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta$;
 - 3) $\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 P_3(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta$;
 - 4) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta \setminus A_1 \setminus N_1$;
 - 5) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta \setminus A_2 \setminus N_2$;
 - 6) $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(x_0, y_0)}{\partial y}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta \setminus A_3 \setminus N_3 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$;
 - 7) $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(x_0, y_0)}{\partial x}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta_a \setminus N_4$;
 - 8) $f(x_0, y_0) = P_3(x_0, y_0)$ при $(x_0, y_0) \in \Delta_a$;
 - 9) $D_{n_i^k}^k f(x_0, y_0) = D_{n_i^k}^k P_3(x_0, y_0)$ при $(x_0, y_0) \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$;
- $k = 1, 2, 3$ (при $i = 2$, $k = 2$, $x_0 \neq \frac{a}{2}$, $y_0 \neq \frac{h}{2}$);

- 10) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i \partial n_i} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i \partial n_i}$ при $(x_0, y_0) \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$;
- 11) $\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i^2 \partial n_i} = \frac{\partial^3 P_3(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i^2 \partial n_i}$ при $(x_0, y_0) \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$;
- 12) $\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i \partial n_i^2} = \frac{\partial^3 P_3(x_0, y_0)}{\partial \sigma_i \partial n_i^2}$ при $(x_0, y_0) \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$;

имеют место следующие оценки:

$$|e_{s-j,j}(x, y)| \leq \begin{cases} C_{s-j,j} M H^{4-s} \gamma^j(\beta) & (j = 0, 1, j \leq s \leq 3), \\ C_{s-j,j} M H^{4-s} \gamma(\alpha) \gamma(\beta) & (j = 2, j \leq s \leq 3), \\ C_{0,3} M H \gamma(\alpha) \gamma^2(\beta) & (j = 3, s = 3). \end{cases}$$

Теорема 8. Существуют абсолютные положительные константы $C_{i,j}$ такие, что для любой функции $f \in W^4 M$ и любого невырожденного треугольника Δ , любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена, заданного условиями (3.1)-(3.3) и одним из условий:

- 1) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ при $(x_0, y_0) \in A_1 \setminus N_1$;
- 2) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ при $(x_0, y_0) \in A_2 \setminus N_2$;
- 3) $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_3(x_0, y_0)}{\partial x^2}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta \setminus [a_1, a_2]$;
- 4) $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial P_3(x_0, y_0)}{\partial y}$ при $(x_0, y_0) \in A_3 \setminus N_3 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$;
- 5) $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(x_0, y_0)}{\partial x}$ при $(x_0, y_0) \in \Delta_b \setminus A_4 \setminus N_4$;
- 6) $f(x_0, y_0) = P_3(x_0, y_0)$ при $(x_0, y_0) \in \Delta_b$;
- 7) $D_{n_2^2}^2 f\left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) = D_{n_2^2}^2 P_3\left(-\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right)$;
- 8) $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} P_3(x, y) dx dy$;

имеют место следующие оценки:

$$|e_{s-j,j}(x, y)| \leq \begin{cases} C_{s-j,j} M H^{4-s} \gamma^j(\alpha) & (0 \leq j \leq 2, j \leq s \leq 3), \\ C_{0,3} M H \gamma^2(\alpha) \gamma(\beta) & (j = 3, s = 3). \end{cases}$$

Теорема 9. Существуют абсолютные положительные константы $C_{i,j}$ такие, что для любой функции $f \in W^4M$ и любого невырожденного треугольника Δ , любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена, заданного условиями (3.1)-(3.3) и $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial P_3(x_0, y_0)}{\partial x}$ при $(x_0, y_0) \in A_4 \setminus N_4$ имеют место следующие оценки:

$$|e_{s-j,j}(x, y)| \leq C_{s-j,j} M H^{4-s} \gamma^j(\alpha) \quad (0 \leq j \leq 3, j \leq s \leq 3).$$

Если в качестве $f(x, y) \in W^4M$ рассмотреть функцию $f^*(x, y) = \frac{M}{4!}(x + a)^2(b - x)^2$, то можно показать, что полученные оценки не улучшаемы на всем классе W^4M с точностью до абсолютных констант.

Для проверки теоретических результатов разработан программный код на языке Python с использованием библиотек NumPy, Matplotlib.

В качестве тестовой использовалась функция $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ на прямоугольном равнобедренном треугольнике с катетами h (для способов 1–5) и на регулярной триангуляции единичного квадрата (для способов 8 и 10).

Заключение. В данной работе исследовались кубические сплайны в одномерном и двумерном случаях. Для каждой из рассмотренных постановок описаны алгоритмы построения, приведены оценки погрешности и выполнены численные эксперименты.

В одномерном случае выведена система уравнений для коэффициентов сплайна, она имеет единственное решение. Полученные оценки погрешности интерполяции были выражены через максимум четвертой производной. Программная реализация алгоритма использовала метод прогонки для трехдиагональной системы. Численные эксперименты подтвердили, что кубическая интерполяция оказалась точнее линейной.

В двумерном случае рассматривались два типа сеток – прямоугольные и треугольные. На прямоугольных сетках сплайн удобно строить как тензорное произведение одномерных. Краевые условия разделяются на четыре типа, а оценки погрешности содержат константы, полученные с помощью теоремы Брамбла–Гильберта. Прямоугольные сетки хорошо работают для областей простой формы, но плохо адаптируются к локальным особенностям функции

и к сложным границам. Также численные эксперименты показали, что на гладкой функции погрешность мала (порядка 10^{-3}), а на высокочастотной – недопустимо велика (почти единица).

Основное внимание уделено интерполяции на треугольных сетках. Для кубического полинома на треугольнике, заданного значениями функции и первыми производными в вершинах, проанализировано влияние дополнительного (десятого) условия. В зависимости от выбора этого условия оценки погрешности могут зависеть либо от наименьшего угла α , либо от среднего β , либо от обоих. Наиболее устойчивыми оказались способы, приводящие к зависимости только от α . Численные эксперименты на тестовой функции показали, что при удачном выборе дополнительного условия удается достичь четвертого порядка сходимости и малой погрешности даже на сравнительно редких сетках. При неудачном – ошибка может оказаться на порядки больше.

Поставленные в работе цель и задачи выполнены.

Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего развития адаптивных методов интерполяции и для решения прикладных задач, где требуется гладкое восстановление функций по табличным данным.