

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Двоичные базисные сплайны в восстановлении изображений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направления - **01.04.02 Прикладная математика и информатика**

механико-математического факультета

Венгелевского Максима Александровича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор

С.Ф. Лукомский

Заведующий кафедрой:
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Введение. Интерполяция является одним из основных инструментов численного анализа и применяется в тех случаях, когда требуется восстановить функцию по известным значениям в конечном наборе точек. Такие задачи возникают при обработке экспериментальных данных, построении графиков, восстановлении кривых и поверхностей, а также при работе с цифровыми изображениями.

Особое место среди методов интерполяции занимают сплайны. Они обладают достаточно простой структурой и позволяют получать гладкие приближения. Благодаря локальному характеру базисных функций изменение значения в одном узле влияет только на ограниченную часть интерполянта, что особенно важно при построении вычислительно эффективных алгоритмов.

В магистерской работе рассматривается интерполяция с помощью двоичных базисных сплайнов второй степени, строящихся на основе функций Радемахера и Уолша и представляющих собой кусочно-квадратичные функции с компактным носителем. Простая аналитическая форма таких сплайнов делает их удобными для исследования и программной реализации.

Основное внимание в работе уделяется построению интерполяционной поверхности с помощью двоичных базисных сплайнов второй степени. Одним из центральных результатов является построение однопроходного алгоритма двумерной интерполяции. В отличие от последовательного подхода, при котором интерполяция выполняется по одной переменной, а затем по другой, однопроходный алгоритм позволяет вычислять коэффициенты двумерного разложения непосредственно при обходе узлов сетки. На каждом шаге вычисляется узловая невязка, после чего в интерполянт вносится локальная поправка. Такой подход делает построение поверхности более наглядным и удобным для реализации.

Кроме того, в работе рассматриваются задачи восстановления кривой на плоскости по неполным данным и восстановления изображения. Восстановление кривой сводится к интерполяции ее координатных функций, а цифровое изображение естественным образом интерпретируется как дискретная функция двух переменных, заданная на прямоугольной сетке пикселей. Поэтому разработанные методы интерполяции оказываются применимыми не только

к одномерным и двумерным функциям, но и к геометрическим и прикладным задачам.

Целью работы является разработка и исследование алгоритмов интерполяции и восстановления данных с использованием двоичных базисных сплайнов второй степени, а также применение построенных методов к восстановлению кривых, поверхностей и изображений.

Структура магистерской работы. Магистерская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и приложений. В первом разделе рассматриваются функции Радемахера и Уолша, а также строится двоичный базисный сплайн второй степени. Во втором разделе изучается одномерная интерполяция кривой базисными сплайнами второй степени. В третьем разделе рассматривается восстановление кривой на плоскости по неполным данным. В четвертом разделе строится интерполяция поверхности двоичными базисными сплайнами и подробно описывается однопроходный алгоритм. В пятом разделе рассматривается применение построенного метода к восстановлению изображения.

Основное содержание работы. В первом разделе исследуются функции Радемахера и Уолша, на основе которых строится двоичный базисный сплайн второй степени. Полученная базисная функция является непрерывной кусочно-квадратичной функцией с непрерывной первой производной и компактным носителем. Именно локальность носителя делает ее удобной для построения интерполяционных алгоритмов, в которых каждое новое слагаемое влияет лишь на ограниченное число соседних узлов. График двоичного базисного сплайна второй степени представлен в соответствии с рисунком 1.

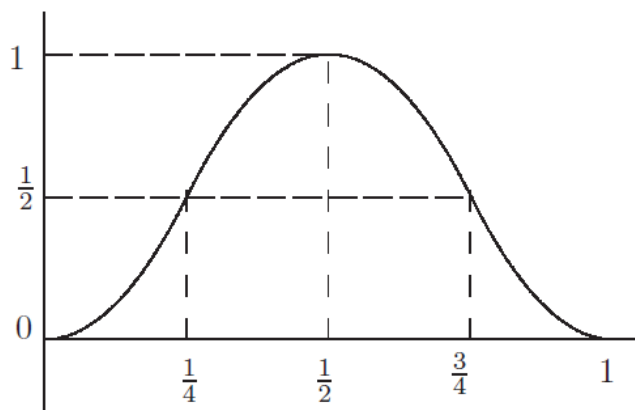


Рисунок 1 — График двоичного базисного сплайна второй степени

Во втором разделе рассматривается одномерная интерполяция на равномерной сетке. Исследуются два варианта масштабирования базисной функции: $\psi\left(\frac{n}{2}x\right)$ и $\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$. Первый вариант использует более узкий носитель и приводит к простому локальному построению интерполянта. Второй вариант имеет особое значение для всей работы, поскольку именно он используется при переходе к двумерной интерполяции. В этом случае носитель охватывает четыре шага сетки, а сам алгоритм строится последовательно по узловым невязкам. Дополнительно вводится параметр M_0 , позволяющий учитывать граничное поведение интерполяционного сплайна у левого конца отрезка. Пример одномерной интерполяции при масштабе $\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$ представлен в соответствии с рисунком 2.

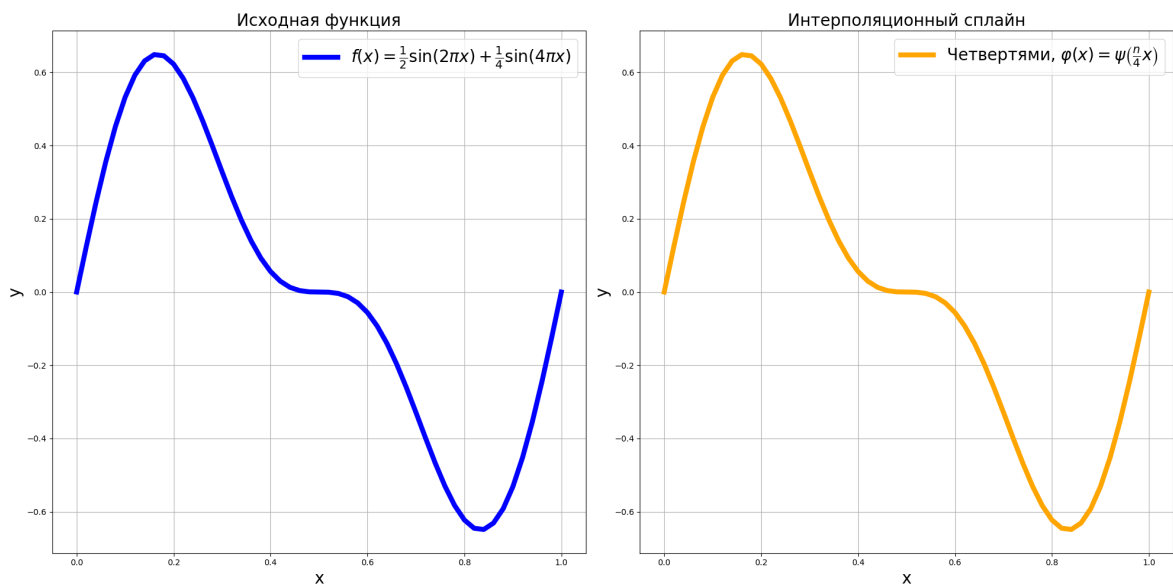


Рисунок 2 — Пример одномерной интерполяции при масштабе $\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$

Построение одномерного интерполянта при масштабе $\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$ выполняется рекуррентно. На каждом шаге вычисляется невязка между заданным значением функции в текущем узле и уже построенным значением сплайна, после чего в интерполянт добавляется локальная поправка. Такой способ построения удобен тем, что новые интерполяционные условия выполняются последовательно и при этом не нарушаются уже выполненные условия в предыдущих узлах. Эта схема затем естественным образом переносится на двумерный случай.

Отдельно в работе проводится сравнение методов одномерной интерполяции для масштабов $n/2$ и $n/4$. Для этого рассматривается гладкая периодическая функция $f(x) = \sin(2\pi x)$ на малом фрагменте отрезка $x \in [0, 0.2]$, что позволяет наглядно проследить поведение интерполяционных сплайнов вблизи левой границы. Для метода $n/4$ дополнительно анализируется влияние параметра M_0 : сначала при выборе $M_0 \approx f'(0)$, а затем при $M_0 = 0$. Графики исходной функции и двух интерполяционных сплайнов, построенных методами $n/2$ и $n/4$, представлены в соответствии с рисунком 3 и рисунком 4.

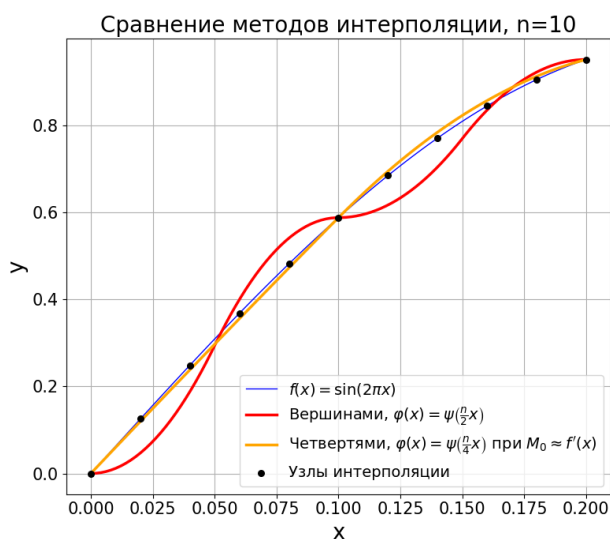


Рисунок 3 — Сравнение методов $n/2$ и $n/4$ при $M_0 \approx f'(0)$

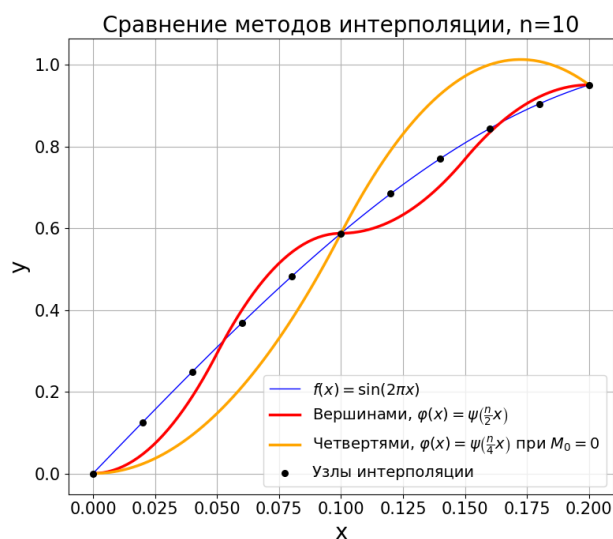


Рисунок 4 — Сравнение методов $n/2$ и $n/4$ при $M_0 = 0$

Сравнение показывает, что метод $n/2$ использует более узкий носитель базисной функции, поэтому локальные изменения выражены сильнее. Метод $n/4$ опирается на более широкий носитель, благодаря чему влияние соседних узлов распределяется более плавно. При этом параметр M_0 играет существенную роль именно для варианта $n/4$: при выборе $M_0 \approx f'(0)$ поведение сплайна у левой границы лучше согласуется с исходной функцией, тогда как при $M_0 = 0$ отличие вблизи начала отрезка становится более заметным.

В третьем разделе рассмотрена задача восстановления кривой на плоскости по неполным данным. Для ее решения кривая задается параметрически, а задача восстановления сводится к двум независимым задачам интерполяции координатных функций $x(t)$ и $y(t)$. При этом также учитываются парамет-

ры $M_{0,x}$ и $M_{0,y}$, отвечающие за начальное направление кривой. Такой подход позволяет применять построенный одномерный алгоритм не только к графикам функций, но и к более общим плоским кривым. Пример восстановления кривой по неполным данным представлен в соответствии с рисунком 5.

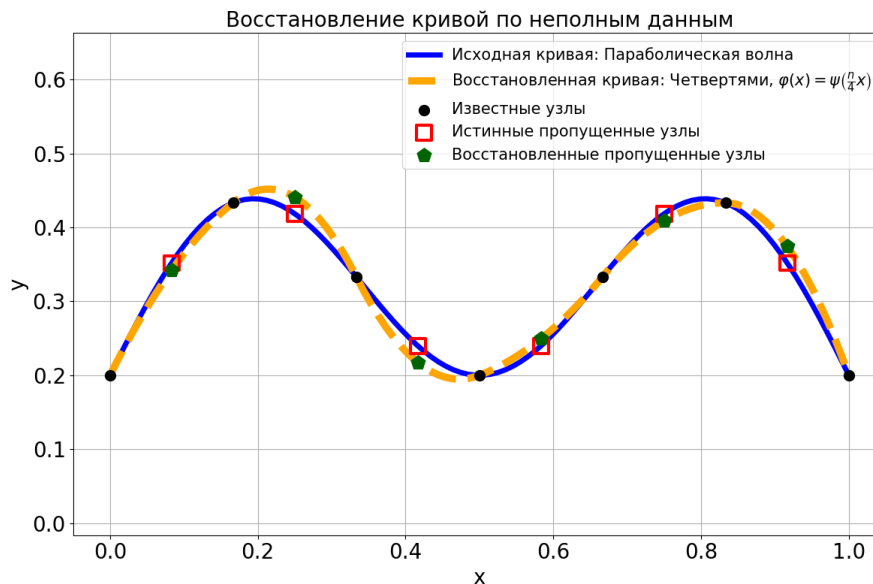


Рисунок 5 — Восстановление кривой по неполным данным

В работе также показано, как меняется качество восстановления при увеличении числа узлов. При малом числе опорных точек кривая проходит через заданные узлы, однако между ними форма восстанавливается менее точно. Увеличение числа узлов дает дополнительную информацию о поведении координатных функций и позволяет заметно улучшить соответствие исходной кривой.

Четвертый раздел является центральным в работе. В нем выполняется переход от одномерной интерполяции к двумерной с помощью тензорного произведения одномерных базисных функций. Интерполяционная поверхность представляется в виде двойной суммы с коэффициентами C_{pq} , а локальность одномерных базисных функций приводит к локальности двумерных базисных элементов. Для описания их действия вводится матрица влияния, показывающая, как один коэффициент изменяет лишь небольшой блок соседних узлов сетки.

Основным результатом четвертого раздела является построение однопроходного алгоритма двумерной интерполяции. В отличие от последователь-

ного метода, при котором интерполяция выполняется поочередно по двум переменным, однопроходный алгоритм вычисляет коэффициенты непосредственно при обходе узлов сетки. В каждом узле определяется текущая невязка между заданным значением и уже накопленным значением интерполанта, после чего эта невязка записывается в соответствующий коэффициент. Затем вклад найденного коэффициента добавляется только в локальную область, на которую влияет соответствующая базисная функция. Для внутренних узлов эта локальная область описывается шаблоном влияния [1, 2, 1] в одномерном случае и матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в двумерном случае. Благодаря этому не требуется пересчитывать всю поверхность после каждого шага, а сам алгоритм оказывается удобным для программной реализации и эффективным с вычислительной точки зрения.

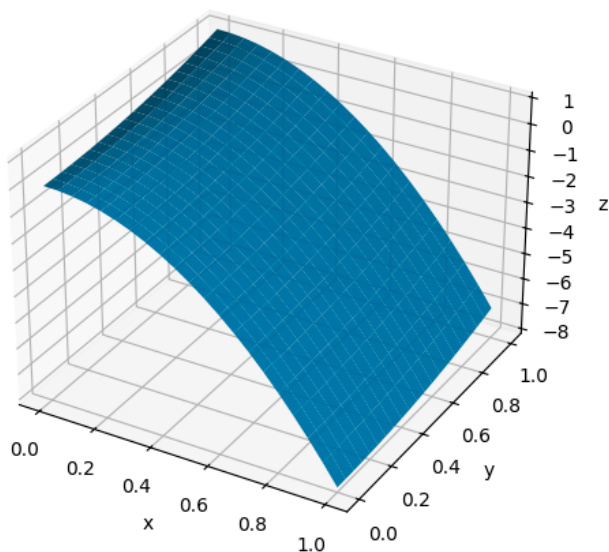
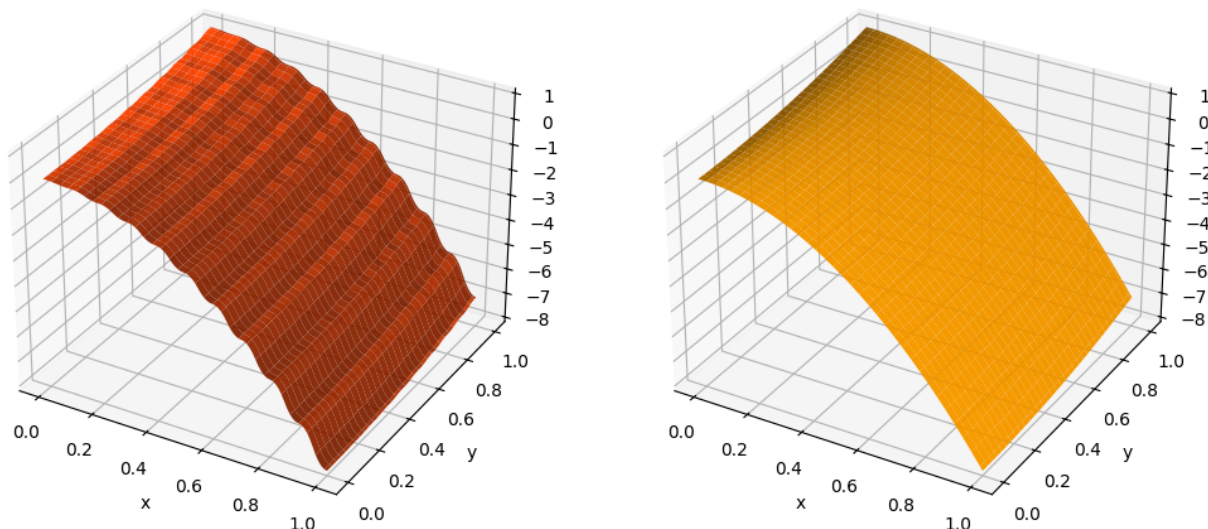


Рисунок 6 — Тестовая поверхность для двумерной интерполяции

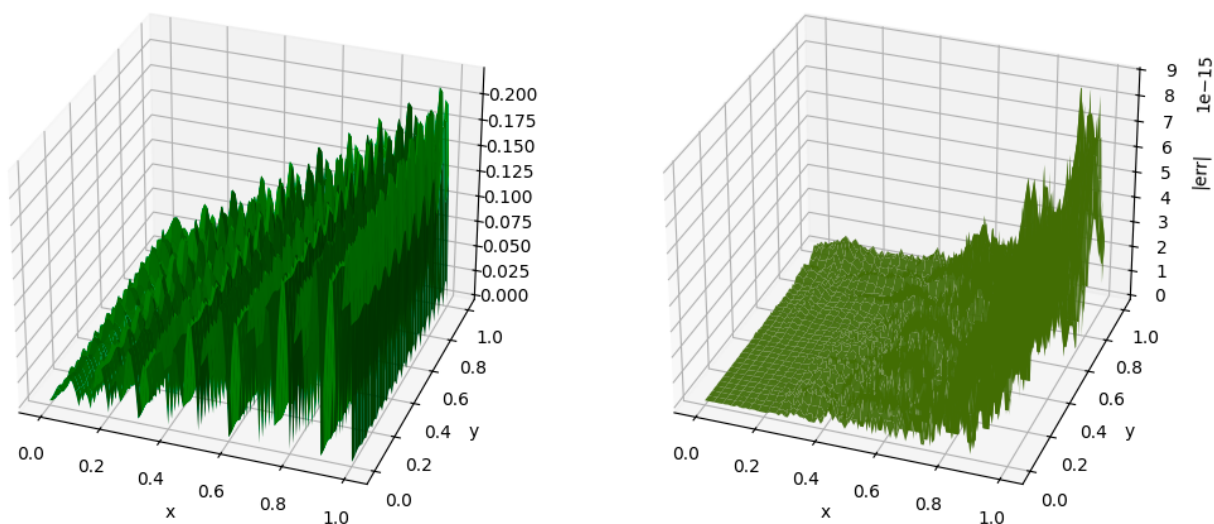
В численных экспериментах отдельно сравниваются два способа построения интерполяционной поверхности: обычный алгоритм при использовании масштабированной базисной функции $\psi\left(\frac{n}{2}x\right)$ и однопроходный алгоритм при использовании $\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$. В качестве тестовой поверхности рассматривается функция $f(x, y) = -8x^2 + y^2$, для которой затем анализируются не только са-

ми интерполяционные поверхности, но и абсолютные погрешности на плотной сетке. График исходной функции представлен в соответствии с рисунком 6. Интерполяционные поверхности, построенные обычным алгоритмом для варианта $n/2$ и однопроходным алгоритмом для варианта $n/4$, представлены в соответствии с рисунком 7.



а) Обычный алгоритм для варианта $n/2$ б) Однопроходный алгоритм для варианта $n/4$

Рисунок 7 — Сравнение интерполяционных поверхностей



а) Абсолютная погрешность для варианта $n/2$ б) Абсолютная погрешность для варианта $n/4$

Рисунок 8 — Сравнение абсолютных погрешностей

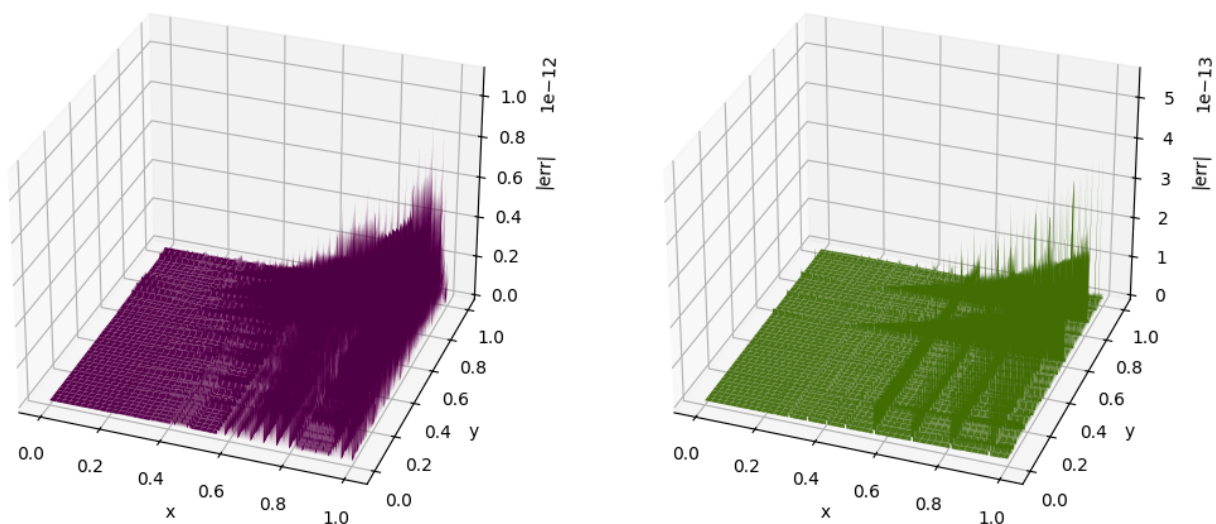
Это сравнение показывает, что оба рассмотренных алгоритма точно воспроизводят исходную поверхность в узлах интерполяции, однако между узлами их поведение различается. Абсолютные погрешности: обычный алгоритм для варианта $n/2$ и однопроходный алгоритм для варианта $n/4$, показаны в соответствии с рисунком 8. Вариант $n/4$ визуально оказывается более близким к исходной квадратичной поверхности, а его абсолютная погрешность остается малой на всей области интерполяции. Вариант $n/2$ сильнее проявляет локальную форму базисной функции, из-за чего между узлами заметнее волнообразные особенности. Тем самым сравнение подтверждает, что масштаб $n/4$ оказывается более удачным для дальнейшего перехода к основному однопроходному алгоритму двумерной интерполяции.

Таблица представленная в соответствии с рисунком 9 содержит количественное сравнение прямого, имеется в виду алгоритм с двумя проходами, и однопроходного алгоритмов для варианта $n/4$: в ней приведены время построения коэффициентов, ошибка в узлах, максимальная абсолютная погрешность и средняя абсолютная погрешность. Из таблицы видно, что оба алгоритма сохраняют интерполяционные свойства и дают очень близкие значения погрешностей, то есть по точности однопроходный алгоритм не уступает прямому. При этом по времени вычислений однопроходный алгоритм оказывается существенно эффективнее: в рассматриваемом численном эксперименте прямой алгоритм выполнил построение примерно за 6,8 с, тогда как однопроходный алгоритм — примерно за 1,8 с. Таким образом, таблица подтверждает, что основное преимущество однопроходного алгоритма состоит в заметном ускорении вычислений при сохранении высокой точности интерполяции.

Сравнение методов				
Метод	Время (с)	Ошибка в узлах	Max ошибка	Mean ошибка
direct-axis	6.845027	5.231371e-13	1.113776e-12	4.982558e-14
single_pass	1.813489	5.559997e-13	5.604406e-13	8.215837e-15

Рисунок 9 — Сравнение прямого и однопроходного алгоритмов для варианта $n/4$

Для более подробного сопоставления прямого и однопроходного способов построения коэффициентов в работе анализируются также графики абсолютной погрешности, которые представлены в соответствии с рисунком 10. Они показывают, что оба алгоритма сохраняют интерполяционные свойства и дают очень близкие результаты, а различия носят в основном вычислительный, а не качественный характер.



а) Абсолютная погрешность прямого алгоритма б) Абсолютная погрешность однопроходного алгоритма

Рисунок 10 — Сравнение абсолютных погрешностей прямого и однопроходного алгоритмов

Проведенные численные эксперименты показывают, что однопроходный алгоритм сохраняет интерполяционные свойства и дает близкую к прямому методу точность, но при этом работает заметно быстрее.

В пятом разделе построенный двумерный алгоритм применяется к задаче восстановления изображения. Цифровое изображение рассматривается как дискретная функция двух переменных, а цветное изображение обрабатывается поканально. Для сравнения рассматриваются метод $n/2$ и метод $n/4$ с однопроходным построением коэффициентов. Восстановление в исходных узлах в обоих случаях выполняется точно, однако при увеличении разрешения различия проявляются в поведении интерполянта между узлами. Для метода $n/4$ качество восстановления существенно зависит от выбора граничных параметров, что особенно заметно на изображениях с резкими цветовыми

переходами. Результат восстановления изображения методом $n/4$ с однопроходным построением представлен в соответствии с рисунком 11.

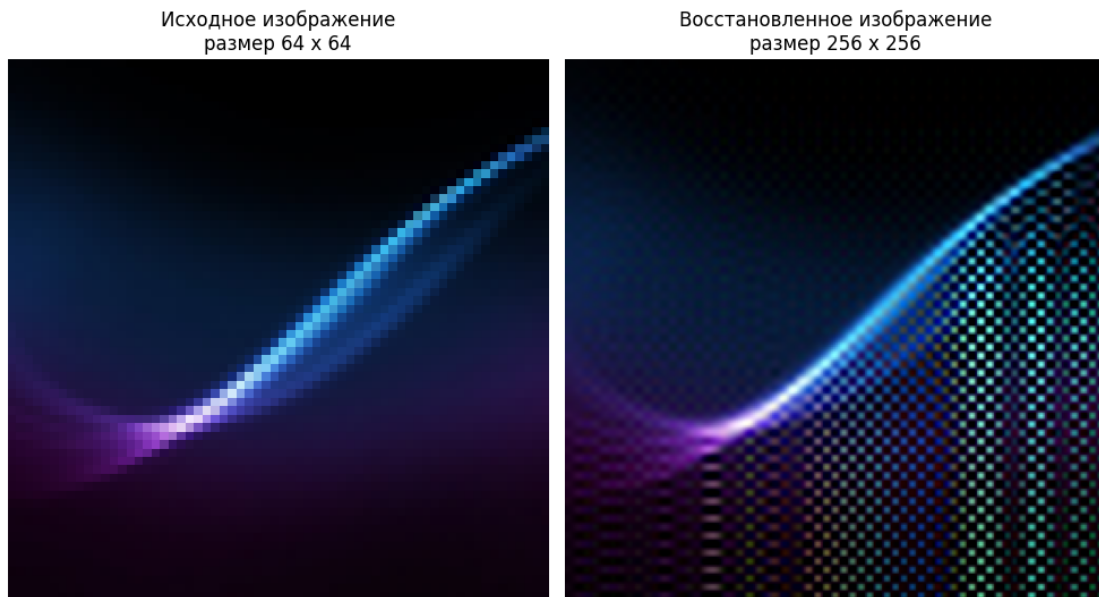


Рисунок 11 — Восстановление изображения методом $n/4$ с однопроходным построением

Заключение. В магистерской работе построены и исследованы алгоритмы интерполяции и восстановления данных с использованием двоичных базисных сплайнов второй степени. Последовательно рассмотрен переход от одномерной интерполяции к восстановлению кривых, поверхностей и изображений. Показано, что двоичные базисные сплайны второй степени удобны для построения локальных интерполяционных схем, а однопроходный двумерный алгоритм позволяет эффективно вычислять коэффициенты по узловым невязкам и обновлять только локальные области сетки. Полученные результаты подтверждают перспективность применения такого подхода к задачам восстановления данных различной природы.