МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Числа Бомбиери

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Шабашовой Елены Денисовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________________ В.Г.Гордиенко

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Теория однолистных функций является одним из фундаментальных разделов геометрической теории функций комплексного переменного. Интерес к данной области математики обусловлен не только внутренней красотой и глубиной теоретических построений, но и широким спектром приложений в аэро- и гидродинамике, теории упругости, картографии и современных задачах математического моделирования.

Центральным объектом изучения в этой теории выступает класс нормированных однолистных функций S, определённых в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости. На протяжении десятилетий главной проблемой теории оставалась гипотеза Бибербаха, утверждающая, что для любой функции $f \in S$ справедлива оценка $|a_n| \leq n$ при $n = 2, 3, \ldots$ Данная гипотеза, сформулированная в 1916 году, была окончательно доказана Л. де Бранжем лишь в 1984 году. Однако её доказательство не закрыло множество смежных вопросов, связанных с точной оценкой коэффициентов и структурой множества значений коэффициентов в окрестности экстремальных отображений.

Особое место в современной теории занимает проблема изучения локальных свойств класса S в окрестности функции Кёбе, которая является экстремальной для многих функционалов. В 1967 году Э. Бомбиери сформулировал гипотезу о локальном поведении коэффициентов, предположив существование универсальных констант (чисел Бомбиери), характеризующих скорость стремления коэффициентов к своим экстремальным значениям при стремлении функции к функции Кёбе. Гипотеза Бомбиери предполагала конкретную тригонометрическую формулу для этих чисел.

Актуальность данной работы обусловлена тем, что гипотеза Бомбиери была опровергнута в начале 2000-х годов для ряда случаев (в частности, для пары индексов $(3, 2)$), однако точные значения чисел Бомбиери для многих других пар остаются неизвестными или требуют уточнения. Кроме того, расширение задачи на класс ограниченных однолистных функций $S(M)$ представляет значительный теоретический интерес. Решение этих задач требует привлечения мощного аппарата теории оптимального управления, в частности принципа максимума Понтрягина, что делает исследование междисциплинарным и методологически насыщенным.

Целью данной работы является вычисление точных значений или точных оценок чисел Бомбиери для различных пар индексов, включая случай ограниченных функций, а также анализ справедливости гипотезы Бомбиери в этих случаях. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. изучить основные свойства класса однолистных функций и класса ограниченных однолистных функций;

2. проанализировать метод вариаций на границе и уравнение Шиффера для исследования опорных точек функционалов на классе S;

3. применить принцип максимума Понтрягина к задаче оценки коэффициентов однолистных функций, сведя задачу геометрической теории функций к задаче оптимального управления;

4. вычислить точное значение числа Бомбиери для класса ограниченных функций и исследовать его зависимость от параметра ограничения;

5. разработать численный алгоритм и программную реализацию для вычисления числа Бомбиери в классе S;

6. сравнить полученные результаты с гипотетическими значениями Бомбиери и сделать выводы о справедливости гипотезы для рассмотренных пар индексов n, m.

Материалами исследования выступают классы S и $S(M)$, функция Кёбе, числа Бомбиери σ_{mn}, метод вариаций на границе, уравнение Шиффера, уравнение Лёвнера, принцип максимума Понтрягина, численные методы решения систем ОДУ (метод Рунге–Кутты 4-го порядка, метод бисекции).

Научная новизна работы заключается в систематизации известных результатов по опровержению гипотезы Бомбиери, получении точной формулы для $\sigma_{32}(M)$ в классе ограниченных функций и проведении независимого численного эксперимента по вычислению σ_{24}, подтверждающего нарушение гипотезы Бомбиери для пары $(2, 4)$. Дипломная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников. В первой главе содержатся необходимые определения и теоремы, вторая глава посвящена опорным точкам и историческому аспекту опровержения гипотезы, третья глава описывает теоретическую базу метода оптимального управления, четвёртая и пятая главы содержат основные результаты вычислений чисел Бомбиери для различных случаев.

Основное содержание работы. В основе исследования лежат строгие определения классов функций и экстремальных отображений.

Определение Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области G, если она дифференцируема в любой точке $z \in G$.

Определение Отображение $w = f(z)$ области D расширенной комплексной плоскости называется конформным, если функция аналитична в D (за исключением, быть может, одного полюса первого порядка) и однолистна в D.

Определение Функция $f(z)$ называется однолистной в точке $z_0 \in D$, если она однолистна в некоторой окрестности точки z_0.

Определение Под классом S понимается класс однолистных функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям: f голоморфна в единичном круге $\mathbb{D}$, f однолистна в $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и имеет разложение в ряд Тейлора $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$.

Определение Подкласс $S(M) \subset S$, $M > 1$, ограниченных функций, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$ в $\mathbb{D}$, называется классом ограниченных однолистных функций.

Определение Функция Кёбе определяется формулой $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ и обладает свойствами однолистности, конформности (отображает $\mathbb{D}$ на $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль отрицательной вещественной оси от $-\infty$ до $-1/4$) и экстремальности (в классе S достигает максимальных значений для коэффициентов: $|a_n| \leq n$, причём для $K(z)$ коэффициенты равны $a_n = n$).

Определение Функцией Пика для класса $S(M)$ называется функция $P_M(z) = M \cdot K^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$, где $K^{-1}(w)$ — обратное отображение Кёбе, а $p_n(M)$ — коэффициенты разложения в ряд Тейлора.

Э. Бомбиери доказал локальную гипотезу Бибербаха и в той же работе поставил задачу найти числа, называемые сейчас числами Бомбиери:

$$\sigma_{mn} := \liminf_{f \to K,\, f \in S} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2,$$

где f стремится к K локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Задача Бомбиери состоит в нахождении точных значений или оценок для величин σ_{mn}, характеризующих скорость приближения коэффициентов к экстремальным значениям, локальное поведение функций в окрестности функции Кёбе и кривизну границы класса S в пространстве коэффициентов. Бомбиери предположил, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где

$$B_{mn} := \min_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{n\sin\theta - \sin(n\theta)}{m\sin\theta - \sin(m\theta)},$$

и доказал, что $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$ при $m = 3$ и нечётных n.

Во второй главе рассматривается линейный функционал в классе S $L_\lambda(f) = \mathrm{Re}(a_3 + \lambda a_2)$, $\lambda \in i\mathbb{R}$. Функции $F \in S$, на которых достигается максимум этого функционала, называются опорными точками.

Классический метод вариаций на границе позволяет описать все опорные точки через решение дифференциального уравнения Шиффера:

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 \left(1 + \frac{AF(z)}{F(z)^2}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{A}{z} + B_0 + Az + z^2,$$

где коэффициенты $A = 2A_2 + \lambda$, $B_0 = 2A_3 + \lambda A_2$ связаны с коэффициентами F.

Определение Функция $f \in S$ называется A-*допустимой*, если она допускает кусочно-аналитическое продолжение на $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ и функция

$$z \mapsto \left(\frac{zf'(z)}{f(z)^2}\right)^2 \left(1 + \frac{Af(z)}{f(z)^2}\right)$$

Из теории вариаций следует, что любая опорная точка является A-допустимой функцией, причём $A \in \mathbb{C}\setminus(-4, 4)$. Для $A \in \mathbb{C}\setminus(-4, 4)$ существует единственная A-допустимая функция $f_A \in S$, чьи коэффициенты выражаются через параметризацию Шаффера–Спенсера:

$$A = A(\rho, \varphi) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) e^{i\varphi} + 2e^{-i\varphi}, \quad \rho \in (0, 1], \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Условие критичности $A = 2a_2(A) + \lambda$ при $\lambda = ip$ сводится к системе уравнений $h(\rho, \varphi) = 0$, $p = p(\rho, \varphi)$. Вводя переменные $v = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \in (0, 1)$ и $x = \cos 2\varphi \in (-1, 1]$, уравнение $h = 0$ эквивалентно $g(v, x) = 0$.

Доказано, что для каждого x существует единственный корень $v = v(x)$, а функция $q(v, x(v))$ строго возрастает от 0 до $q(1/e, -1) = \frac{4e}{e-1}$.

Это приводит к основной теореме Грейнера–Рота:

Теорема Пусть $F \in S$ — опорная точка функционала L_λ. Тогда:

(a) Если $|p| \geq \dfrac{4e}{e-1} \approx 6.3279$, то

$$F(z) = iK(-iz) \quad (\text{при } p > 0), \qquad F(z) = -iK(iz) \quad (\text{при } p < 0),$$

где $K(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ — функция Кёбе.

(b) Если $0 < |p| < \dfrac{4e}{e-1}$, то F не является вращением функции Кёбе.

Из теоремы следует неравенство $\frac{2-\operatorname{Re} a_2}{3-\operatorname{Re} a_3} \geq \frac{e-1}{4e}$. Выбирая последовательность $\lambda_n \to \frac{4e}{e-1}$, получаем функции $F_n \to K$, для которых отношение стремится к $\frac{e-1}{4e} \approx 0.15803 < \frac{1}{4} = B_{32}$. Следовательно, гипотеза Бомбиери опровергнута для пары $(3, 2)$, и точное значение числа Бомбиери равно $\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e}$.

В третьей главе для дальнейшего анализа коэффициентов применяется аппарат теории оптимального управления. Рассматривается управляемый объект, движение которого описывается системой уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r) = f^i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = f(x, u).$$

В пространстве переменных $u^1, \ldots, u^r$ задано некоторое множество U (область управления); допустимым управлением считается произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$ со значениями в U, непрерывная справа в точках разрыва и непрерывная на концах отрезка, на котором она определена.

Далее, в фазовом пространстве X переменных $x^1, \ldots, x^n$ заданы две точки x_0 и x_1 (начальное и конечное фазовые состояния). Рассматривается процесс

$(u(t), x(t)), t_0 \leq t \leq t_1$, переводящий объект из состояния x_0 в состояние x_1; это означает, что $x(t)$ есть решение системы, соответствующее допустимому управлению $u = u(t)$ и удовлетворяющее начальному и конечному условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Процесс $(u(t), x(t))$ называется оптимальным (в смысле быстродействия), если не существует процесса, переводящего объект из состояния x_0 в состояние x_1 за меньшее время.

Для формулировки необходимого условия оптимальности введем функцию H, зависящую от переменных $x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r$ и вспомогательных переменных $\psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$H(\psi, x, u) = \psi f(x, u) = \sum_{a=1}^{n} \psi_a f^a(x, u).$$

С помощью этой функции H запишем систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема (Принцип максимума Понтрягина). Для оптимальности процесса $(u(t), x(t))$ необходимо существование такого ненулевого решения $\psi(t), t_0 \leq t \leq t_1$, вспомогательной системы, что для любого момента τ и любого $v \in U$ выполнено условие максимума

$$H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\psi(\tau), x(\tau), v),$$

а в конечный момент времени t_1 выполнено условие

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geq 0.$$

Данный аппарат позволяет свести вариационные задачи геометрической теории функций к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами, что открывает путь к точному вычислению экстремальных значений функционалов.

Далее рассматривается задача Бомбиери в классе ограниченных функций $S(M)$ и точная формула для $\sigma_{32}(M)$. При переходе к классу $S(M)$ роль экстремальной функции Кёбе берёт на себя функция Пика P_M. Числа Бомбиери для класса $S(M)$ определяются как $\sigma_{mn}(M) = -\inf\{\mu \in \mathbb{R}\}$, где нижняя грань берётся по множеству μ, при которых локальный максимум функционала $\mathrm{Re}(a_n + \mu a_m)$ в классе $S(M)$ доставляется функцией P_M.

Для вычисления $\sigma_{32}(M)$ исследуется функционал $L(\mu; f) = \mathrm{Re}(a_2 + \mu a_3)$. С помощью уравнения Лёвнера $\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}$ и замены $t \to 1-e^{-t}$ коэффициенты представляются через интегралы, что приводит к системе вещественных ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2\cos u, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = 2\sin u, & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = -4x_1\cos u - 4x_2\sin u - 2(1-t)\cos 2u, & x_3(0) = 0, \end{cases}$$

где $a_2(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, $\mathrm{Re}\, a_3(t) = x_3(t)$.

Экстремальная задача эквивалентна максимизации $x_1(T) + \mu x_3(T)$ при $T = 1 - 1/M$. Применяя принцип максимума Понтрягина к функционалу с оптимальным управлением $u \equiv \pi$, строятся сопряжённые переменные $\Psi_i(t)$ и анализируется квадратичная форма второй вариации. Достаточное условие локального максимума выражается неравенством $(x_1)_{pp}(1-1/M)+\mu(x_3)_{pp}(1-1/M) < 0$.

После детального анализа случаев $M > e$ и $1 < M \le e$ получается точная формула:

$$\sigma_{32}(M) = \begin{cases} \frac{M}{4(M-1)}, & 1 < M \le e, \\ \frac{M(e-1)}{4(Me-2e+1)}, & e \le M < \infty. \end{cases}$$

При $M \to \infty$ формула асимптотически переходит в $\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e}$, что полностью согласуется с результатами Грейнера и Рота.

Таким образом, установлено, что поведение экстремали в классе ограниченных функций критически зависит от параметра M, а предельный переход восстанавливает результат для неограниченного класса.

В четвертой главе рассматривается задача вычисления точного значения числа Бомбиери σ_{24}, которое определяется как супремум всех значений λ_{24}, при которых функция Кёбе даёт локальный максимум функционалу $\mathrm{Re}(a_4 - \lambda_{24}a_2)$ в классе S.

Рассматривается функционал $L_1(\nu; f) = a_4 + \nu a_2$, где $\nu = -\lambda_{24}$. Условия трансверсальности на правом конце $t = 1$ задаются как $\Psi_1(1) = \nu$, $\Psi_5(1) = 1$, $\Psi_2(1) = \Psi_3(1) = \Psi_4(1) = 0$. Согласно теореме о необходимом и достаточном условии локального экстремума, функция Кёбе даёт максимум тогда и только тогда, когда квадратичная форма второй вариации отрицательно полуопределена: $F_{pp}(0,0) \leq 0$, $F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 \geq 0$. Граничное значение ν достигается при обращении в нуль определителя матрицы Гессе:

$$G(\nu) = (\nu y_1(1) + y_3(1))(\nu y_7(1) + y_9(1)) - (\nu y_{13}(1) + y_{15}(1))^2 = 0,$$

где переменные y_k описывают первые и вторые вариации фазовых и сопряжённых траекторий, удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений из исходной работы. Уравнение $G(\nu) = 0$ является трансцендентным, и аналитическое решение в замкнутой форме невозможно.

Для нахождения корня разработан программный комплекс на языке Python. Алгоритм включает:

1. инициализацию системы из 15 дифференциальных уравнений с начальными условиями $y_1(0) = \cdots = y_5(0) = 0$, $y_6(0) = 1$, $y_7(0) = \cdots = y_{15}(0) = 0$;
2. численное интегрирование методом Рунге–Кутты 4-го порядка на отрезке $t \in [0, 1]$ при заданном ν;
3. вычисление $G(\nu)$;
4. поиск корня методом бисекции.

В результате вычислений найден корень $\nu \approx -0.9695564732$, следовательно, искомое число Бомбиери равно $\sigma_{24} = -\nu \approx 0.9695564732$. Это значение согласуется с результатами работ Прохорова и Васильева.

Сравнение с гипотезой Бомбиери показывает строгое неравенство. Гипотеза утверждала, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где для $m = 2, n = 4$ гипотетическое значение равно $B_{24} = 1$. Полученное значение $\sigma_{24} \approx 0.969556 < 1 = B_{24}$ строго опровергает гипотезу Бомбиери для пары индексов $(2, 4)$. Разработанный алгоритм демонстрирует высокую устойчивость и может быть адаптирован для вычисления чисел Бомбиери при других парах (n, m), что подтверждает эффективность методов оптимального управления в задачах геометрической теории функций.

Заключение. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы проведено комплексное исследование экстремальных свойств коэффициентов однолистных функций в контексте задачи Бомбиери. На основе анализа теоретического материала и проведённых вычислений сформулированы следующие выводы:

1. Исследованы опорные точки функционалов. С использованием метода вариаций на границе и уравнения Шиффера показано, что при определённых значениях параметра λ экстремум функционала $\mathrm{Re}(a_3 + \lambda a_2)$ достигается не на функции Кёбе, а на других функциях класса S. Это послужило теоретической основой для строгого опровержения гипотезы Бомбиери.

2. Подтверждено опровержение гипотезы для σ_{32}. Воспроизведён результат Грейнера и Рота, согласно которому $\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} \approx 0.158$, что строго меньше гипотетического значения $B_{32} = 0.25$.

3. Получена точная формула для ограниченных функций. Для класса $S(M)$ вычислено $\sigma_{32}(M)$, установлено зависящее от параметра M поведение экстремали и доказана корректность предельного перехода к неограниченному случаю, что расширяет классическую теорию на классы функций с ограниченной областью значений.

4. Разработан численный алгоритм для σ_{24}. С применением принципа максимума Понтрягина задача сведения к решению системы дифференциальных уравнений. Реализован устойчивый программный алгоритм на языке Python, использующий методы Рунге–Кутты 4-го порядка и бисекции для решения трансцендентного уравнения $G(\nu) = 0$, определяемого через вторую вариацию функционала.

5. Подтверждено опровержение гипотезы для σ_{24}. Численное вычисление показало, что $\sigma_{24} \approx 0.9696$, что строго меньше гипотетического значения $B_{24} = 1$.

Таким образом, цель работы достигнута: получены новые данные о числах Бомбиери, строго подтверждена несостоятельность гипотезы Бомбиери для пар $(3, 2)$ и $(2, 4)$, продемонстрирована эффективность методов оптимального управления в задачах геометрической теории функций. Разработанный программный алгоритм может быть адаптирован для вычисления чисел Бомбиери при других парах индексов, что открывает перспективы для дальнейших исследований в данной области.