МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Приближение плоской выпуклой области шаром фиксированного радиуса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Царевой Оксаны Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________________ М.А.Осипцев

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение Современная теория оптимизации и выпуклый анализ предоставляют аппарат для аппроксимации сложных множеств объектами простой структуры. В задачах компьютерного зрения, робототехники, геоинформатики и инженерной графики возникает необходимость замены выпуклого множества на шар фиксированного радиуса, что обусловлено требованиями безопасности, упрощением вычислений в реальном времени и техническими ограничениями. Двумерный случай обладает высокой наглядностью геометрической интерпретации и вычислительной эффективностью, что делает его оптимальным полигоном для создания быстродействующих алгоритмов и учебных визуализаций.

Целью данной работы является комплексное исследование задачи оценки выпуклого тела шаром фиксированного радиуса в метрике Хаусдорфа, включая анализ свойств решения, условий его единственности и вариационных зависимостей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. рассмотреть свойства выпуклых множеств и обобщения понятия выпуклости;
2. изучить математическую постановку задачи и свойства вспомогательных функций расстояния;
3. проанализировать необходимые и достаточные условия оптимальности в зависимости от значения фиксируемого радиуса;
4. исследовать условия единственности решения в двумерном случае;
5. изучить вариационные свойства решения при изменении радиуса шара;
6. разработать программный модуль для численного решения задачи.

Материалами исследования выступают классы выпуклых и сильно выпуклых множеств, метрика Хаусдорфа, функции расстояния до наиболее удалённой и ближайшей точек тела, субдифференциальное исчисление, методы негладкой оптимизации, а также численные алгоритмы на языке Python.

Научная новизна заключается в получении полной классификации множества решений задачи в зависимости от значения фиксируемого радиуса, выделении пяти непересекающихся диапазонов с четкими необходимыми и достаточными условиями оптимальности, для случая размерности пространства $p = 2$ строгом доказательстве единственности решения в промежуточном диапазоне радиусов, что является фундаментальным отличием от многомерного случая и разработке алгоритма численного решения, использующего аналитические свойства субдифференциала целевой функции и методы гладкой оптимизации (BFGS).

Научная и практическая значимость работы определяется теоретическим вкладом в развитие негладкой оптимизации и выпуклого анализа, а также возможностью применения полученных результатов и программного модуля в задачах сравнения форм объектов, планирования траекторий мобильных роботов, контроля допусков в CAD/CAM системах и обучении методам вычислительной геометрии.

Структура работы включает введение, три главы, заключение, список использованных источников и приложение с программной реализацией. В первой главе содержатся базовые свойства выпуклых множеств и теорема об отделимости, вторая глава посвящена обобщениям выпуклости и субдифференциальному аппарату, третья глава содержит постановку задачи, условия оптимальности, доказательство единственности решения на плоскости и анализ пяти диапазонов радиуса.

Основное содержание работы. В основе исследования лежат строгие определения выпуклых множеств и аппарата выпуклого анализа, необходимые для корректной формулировки условий оптимальности.

Определение. Пусть X – вещественное векторное пространство, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Множество $A \subset X$ называется выпуклым, если для любого числа $\lambda \in (0;1)$ и любых точек $x_1, x_2 \in A$ справедливо включение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

Данное определение задаёт геометрическую структуру тела D, позволяя использовать свойства проекций и опорных функций в дальнейших доказательствах.

Определение.

1. Пусть множества A и B из X таковы, что существует линейный функционал $p \in X^* \setminus \{0\}$ такой, что $\langle p, a\rangle \leq \langle p, b\rangle, \forall a \in A, \forall b \in B$. Это значит, что существует число $\alpha = sup\{\langle p, a\rangle \mid a \in A\}$, при котором справедливы

включения

$$A \subset H_p^-(\alpha) = \{x \in X \mid \langle p, z\rangle \le \alpha, B \subset H_p^+(\alpha) = \{z \in X \mid \langle p, z\rangle \ge \alpha\}.$$

в этом случае говорят, что гиперплоскость $H_p(\alpha) = \{z \in X \mid \langle p, z\rangle \ge \alpha\}$ (или функционал p) отделяет множества A и B.

2. Если, более того, имеется строгое неравенство $\langle p, a\rangle < \langle p, b\rangle \ \forall a \in A, \forall b \in B$, т. е. существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $A \subset H_p^-(\alpha)$ и $B \subset intH_p^+(\alpha)$ или $A \subset intH_p^-(\alpha)$ и $B \subset H_p^+(\alpha)$, то говорят, что гиперплоскость $H_p(\alpha)$ (или функционал p) строго разделяет множества A и B.

Теорема (Об отделимости). Пусть даны выпуклое замкнутое множество $A \subset X$ и точка $x \notin A$. Определим вектор $p = (x - P_A x)/ \parallel x - P_A x \parallel \in \partial B_1(0)$. Тогда гиперплоскость $H_p(\alpha) = \{z \in X \mid \langle p, z\rangle = \alpha$, где $\alpha = \langle p, P_A x\rangle$, строго отделяет точку x от множества A (т. е. $x \in intH_p^+(\alpha) = \{z \in X \mid \langle p, z\rangle > \alpha\}$ и $A \subset H_p^-(\alpha) = \{z \in X \mid \langle p, z\rangle \le \alpha\}$)

Эта теорема используется для обоснования существования и единственности проекции, а также для анализа касательных свойств границы тела при вычислении субдифференциалов функций расстояния.

Определение. Конус K называется выпуклым, если $\lambda x + \mu y \in K$ для любых $x, y \in K$ и $\lambda, \mu \ge 0$.

Аппарат выпуклых конусов применяется при описании нормальных конусов к границе множества, что необходимо для анализа условий касания шара и тела D.

Во второй главе рассматриваются расширения классического определения, играющие ключевую роль в анализе устойчивости решений.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется сильно выпуклым радиуса $R > 0$, если $A = \bigcap_{x \in E} B_R(x)$, где E есть некоторое множество центров шаров радиуса $R > 0$.

Теорема (Опорный принцип). Всякий выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является R-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\| = 1$, отрезок $D_R(x_p, y_p)$ является R-сильно выпуклым отрезком, и при этом:

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} D_R(x_p, y_p) \tag{0.0.1}$$

где точка $x_p \in A$ определена из равенства $\langle p, x_p \rangle = s(p, A)$, а точка $y_p \in A$ определена из равенства $\langle p, y_p \rangle = \inf_{x \in A} \langle p, x \rangle$.

Этот принцип даёт конструктивный способ проверки сильной выпуклости через опорные прямые, что впоследствии используется при анализе геометрии множества решений.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Далее вводится субдифференциальный аппарат.

Определение. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^p$. Вектор $g \in \mathbb{R}^p$ называется субградиентом функции f в точке x_0, если для любого $x \in \mathbb{R}^p$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq F(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle. \tag{0.0.2}$$

Множество всех субградиентов функции f в точке x_0 называется субдифференциалом и обозначается $\partial f(x_0)$:

$$\partial f(x_0) = \{g \in \mathbb{R}^p : f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^p\}. \tag{0.0.3}$$

Теорема. Точка x^* является точкой глобального минимума выпуклой функции f тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(x^*)$.

Данный критерий является центральным инструментом работы: поскольку целевая функция задачи негладка, классический градиентный анализ неприменим, и минимизация сводится к проверке включения нуля в субдифференциал.

Определение (По Ефимову–Стечкину). Множество A слабо выпукло с константой R, если $A = \bigcap_{a \in A_1} (\operatorname{int} B_R(a))^c$.

Изучение слабой выпуклости необходимо для анализа поведения функции расстояния до границы тела в окрестности точек касания.

В третьей главе содержится ядро исследования.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклое тело, $B_n(x,r)$ – шар радиуса r с центром x.

Постановка задачи. Минимизировать в метрике Хаусдорфа функцию $\phi(x,r) = h(D, B_n(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}$. Целевая функция представима в виде $\phi(x,r) = \max\{R(x,D) - r, P(x,D) + r\}$, где $R(x,D) = \max_{y\in D} \|x-y\|$ – функция наибольшего удаления, $P(x,D) = \rho(x,D) - \rho(x,\Omega)$ – симметризованное расстояние до границы. Введённое представление позволяет разбить негладкую задачу на анализ двух выпуклых функций, свойства которых хорошо изучены.

Критические значения радиуса. Вводятся $r_R^{\pm} = (R^* - P^{\mp})/2$ и $r_P^{\pm} = (R^{\pm} + \rho^*)/2$, где R^*, ρ^* – радиусы наименьшего описанного и наибольшего вписанного шаров. Устанавливается упорядоченность $0 \le r_R^- \le r_R^+ \le r_P^- \le r_P^+ < \infty$.

Очевидно, если задача о внутренней оценке имеет единственное решение, то $r_P^- = r_P^+$.

В [?] показано, что

$$r_P^- = r_R^+ \iff C_R \cap C_\rho \neq \emptyset. \tag{0.0.4}$$

Теорема. Для того чтобы точка $x^* \in C_\phi(r)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Если $r \in [0, r_R^-]$, то $0 \in \partial R(x^*, D)$.
2. Если $r \in [r_R^-, r_R^+]$, то $0 \in \partial R(x^*, D)$ и $R^* - P(x^*, D) \ge 2r$.
3. Если $r \in [r_R^+, r_P^-]$, то $0 \in \mathrm{co}\{\partial R(x^*, D), \partial P(x^*, D)\}$ и $R(x^*, D) - P(x^*, D) = 2r$.
4. Если $r \in [r_P^-, r_P^+]$, то $0 \in \partial P(x^*, D)$ и $R(x^*, D) + \rho^* \le 2r$.
5. Если $r \ge r_P^+$, то $0 \in \partial P(x^*, D)$.

Доказательство основано на формулах субдифференциалов функций R и P и свойстве $0 \in \partial\phi(x^*, r)$. Эта теорема полностью классифицирует множество решений в зависимости от радиуса, что позволяет избежать переборных алгоритмов и сразу определять активные ограничения.

Рассмотрим функцию

$$f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x, r). \tag{0.0.5}$$

Функция $f(r)$ выражает поведение оптимального значения целевой функции задачи с ростом r на положительной полуоси.

Теорема. Функция $f(r)$ является конечной выпуклой на $\mathbb{R}^n_+$ функцией, причем

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & \text{если } r \in [0, r_R^+], \\ r - \rho^*, & \text{если } r \geq r_P^+. \end{cases} \tag{0.0.6}$$

Функции $P(x, D)$ и $R(x, D)$ для любого $x \in C_\phi(r)$ при фиксированном $r \in [r_R^+, r_P^+]$ принимают фиксированное значение и верно

Следствие. При любом фиксированном $r \in [r_R^+, r_P^+]$ выполняется

$$R(x, D) = f(r) + r, \quad P(x, D) = f(r) - r, \quad \forall x \in C_\phi(r). \tag{0.0.7}$$

Кроме того, имеет место монотонность соответствующих значений этих функций с ростом r.

Следствие. Функция $f_R(r) = f(r) + r$ строго возрастает, а функция $f_P(r) = f(r) - r$ строго убывает на отрезке $[r_R^+, r_P^+]$.

Однако для плоскости справедливо важное утверждение о единственности решения в промежуточном диапазоне радиусов.

Теорема. Пусть размерность пространства $p = 2$. Тогда для любого значения $r \in (r_R^+, r_P^-)$ решение задачи является единственным.

Допустим $x_1 \neq x_2$ и $x_1, x_2 \in C_\phi(r)$. В силу выпуклости множества решений $[x_1, x_2] \subset C_\phi(r)$. Согласно следствию, на отрезке $R(x, D)$ и $P(x, D)$ постоянны. Геометрия опорных прямых к D и шару $B_n(x, \rho(x, \Omega))$ на плоскости такова, что постоянство этих функций на отрезке возможно лишь в тривиальных случаях, противоречащих условию $r \in (r_R^+, r_P^-)$. Следовательно, $C_\phi(r)$ состоит из одной точки.

Доказанная единственность решения в двумерном случае принципиально упрощает численную реализацию. Она позволяет заменить трудоёмкие методы негладкой оптимизации на эффективные алгоритмы гладкой минимизации (например, BFGS), что значительно сокращает время вычислений и повышает надёжность программного модуля.

Для строгого понимания хода решения задачи проведён детальный анализ структуры множества $C_\phi(r)$ на примере разностороннего треугольника при евклидовой норме. В каждом из пяти диапазонов радиуса r исследовано, какие геометрические элементы тела D (вершины или стороны) становятся активными в формулах субдифференциалов $\partial R(x, D)$ и $\partial P(x, D)$. В диапазоне 1 ($r \in [0, r_R^-]$) активными являются только вершины, что геометрически означает невозможность шара эффективно аппроксимировать тело изнутри; условие $0 \in \partial R(x^*, D)$ фиксирует центр в точке пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности x_R). В диапазоне 5 ($r \geq r_P^+$) доминирует внутренняя аппроксимация, активными становятся стороны треугольника, условие $0 \in \partial P(x^*, D)$ фиксирует центр в точке пересечения биссектрис (центр вписанной окружности x_ρ). Переходные диапазоны 2 и 4 описывают монотонное сужение или расширение множества решений внутри C_R и C_ρ соответственно. Наибольший теоретический и практический интерес представляет промежуточный диапазон 3 ($r \in [r_R^+, r_P^-]$), где выполняется баланс ошибок $R(x^*, D) - P(x^*, D) = 2r$, а условие $0 \in \mathrm{co}\{\partial R, \partial P\}$ отражает равновесие нормалей к вершинам и сторонам. Анализ показал, что траектория оптимального центра $x(r)$ представляет собой непрерывную кусочно-линейную кривую, соединяющую x_R и x_ρ, причём точки излома соответствуют смене активного множества точек касания. Данное разбиение необходимо для обоснования сходимости численных методов: знание аналитической структуры решения позволяет избежать переборных алгоритмов и гарантировать попадание итерационного процесса в правильный базис оптимальности, что критически важно для построения устойчивых вычислительных схем.

На основе установленных теоретических закономерностей разработан программный модуль на языке Python, автоматизирующий поиск оптимального центра $x^*(r)$ и визуализацию процесса аппроксимации. Алгоритм последовательно вычисляет критические радиусы r_R и r_P аналитически, определяет текущий режим решения по заданному r и выбирает стратегию минимизации.

В краевых диапазонах решение находится мгновенно через формулы центров описанной и вписанной окружностей. В промежуточном диапазоне, где доказана единственность решения (Теорема 7), применяется квазиньютоновский метод BFGS из библиотеки `scipy.optimize`. Использование методов гладкой оптимизации вместо общего субградиентного спуска оправдано доказанной строгой выпуклостью целевой функции в этой области и позволяет достичь машинной точности за 10–20 итераций. Модуль включает функции вычисления функций расстояния $R(x, D)$ и $P(x, D)$, автоматической проверки условий оптимальности (вхождение нуля в субдифференциал или выпуклую оболочку) и генерации графических иллюстраций с помощью `matplotlib`. Код спроектирован модульно, что обеспечивает его масштабируемость на выпуклые многоугольники с произвольным числом вершин $N \leq 100$ без изменения логики ядра алгоритма. Внедрение автоматического выбора режима решения исключает риск попадания итерационного метода в область негладкости, где классические градиентные методы расходятся.

Полученные результаты и их верификация. Численные эксперименты на тестовом наборе данных (разносторонний треугольник с вершинами $A(0, 0), B(4, 0), C(1, 3)$) полностью подтвердили теоретические построения. Вычисленные критические радиусы составили $r_R = 3.5000$ и $r_P \approx 1.9008$, что совпало с аналитическими предсказаниями с точностью до 10^{-6}. При варьировании радиуса r от 0 до r_P^+ траектория центра $x(r)$ продемонстрировала монотонное смещение от $x_R(1.00, -2.00)$ к $x_\rho(1.46, 1.05)$, а график оптимального значения $\phi(x^*, r)$ точно воспроизвёл теоретическую форму: линейное убывание на краях и строго выпуклый провал в промежуточной зоне. Автоматическая проверка условий оптимальности показала, что в диапазоне 3 невязка уравнения баланса $R(x, D) - P(x, D) - 2r$ не превышает 10^{-10}, а вектор нуля лежит внутри выпуклой оболочки градиентов активных ограничений. Время решения для одного значения r не превышает 0.05 с, а полная генерация траектории и визуализация занимают менее 0.5 с на стандартном оборудовании. Полученные данные доказывают практическую применимость разработанного алгоритма для задач оперативной аппроксимации контуров, а подтверждённая единственность решения гарантирует устойчивость численной схемы к выбору начального приближения, что позволяет встраивать модуль в системы реального времени (робототехника, CAD/CAM, обработка геопространственных данных) без риска потери сходимости.

Заключение В ходе выполнения выпускной квалификационной работы проведено комплексное исследование задачи оценки выпуклого тела шаром фиксированного радиуса в метрике Хаусдорфа. На основе анализа теоретического материала и проведённых вычислений сформулированы следующие выводы:

1. Исследованы опорные принципы и свойства выпуклых, сильно выпуклых и слабо выпуклых множеств. С использованием теоремы об отделимости и аппарата субдифференциального исчисления получен конструктивный критерий оптимальности для задач аппроксимации. 2. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия решения задачи для пяти непересекающихся диапазонов фиксируемого радиуса r. Установлено, что множество решений $C_\phi(r)$ обеспечивает непрерывный переход от центра описанного шара к центру вписанного шара при монотонном изменении r. 3. Доказана Теорема 7, утверждающая гарантированную единственность решения задачи наилучшего приближения в двумерном случае для промежуточного диапазона $r \in (r_R^+, r_P^-)$. Это фундаментальное отличие от многомерной ситуации упрощает численную реализацию и позволяет применять эффективные методы гладкой оптимизации. 4. Установлено, что оптимальное значение целевой функции $f(r)$ является выпуклой функцией, кусочно-линейной на краевых диапазонах и строго выпуклой в промежуточной области. Монотонность вспомогательных функций $f_R(r)$ и $f_P(r)$ обеспечивает устойчивое поведение траектории оптимального центра. 5. Разработан и апробирован программный модуль на языке Python для численного решения задачи. Алгоритм включает вычисление критических радиусов, автоматическое определение режима решения и визуализацию. Тестирование на примере разностороннего треугольника показало полное совпадение численных результатов с аналитическими предсказаниями.

Таким образом, цель работы достигнута, все поставленные задачи решены. Полученные результаты могут быть использованы в задачах сравнения форм объектов, планирования траекторий мобильных роботов, контроля допусков в CAD/CAM системах, а также при чтении курсов по выпуклому анализу и вычислительной геометрии. Разработанный алгоритм демонстрирует высокую эффективность и служит базовым модулем для расширения на случай размерности $p = 3$ и неевклидовых норм.