

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра _____
математического анализа

_____ Цепи Левнера для функций Базилевича _____

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента _____ 4 _____ курса 421 _____ группы

направление _____ 02.03.01 — Математика и компьютерные науки _____

_____ механико-математического факультета _____

_____ Сейтмамбетова Ленура Сабриевича _____

Научный руководитель
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

_____ Е.В. Разумовская _____

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

_____ Е.В. Разумовская _____

Введение. Современная теория функций комплексного переменного является одной из наиболее развитых и активно исследуемых областей математического анализа. Важной частью этой теории являются исследования, связанные с различными классами аналитических однолистных функций, обладающих специфическими свойствами и характеристиками. Одним из таких классов являются функции Базилевича, которые находят широкое применение в теории операторов и геометрической теории функций.

Целью данной бакалаврской работы является исследование цепей Левнера для функции Базилевича. Основное внимание будет уделено изучению структурных особенностей этих цепей и выявлению их ключевых свойств. В рамках работы будут рассмотрены теоретические аспекты построения цепей Левнера, а также проведен анализ на различных классах функций Базилевича. Для достижения данной цели были сформулированы и выполнены следующие задачи:

- Изучение частного случая первого уравнения Левнера-Куфарева, порождающего функции класса Базилевича;
- Рассмотрение цепи Левнера для функций класса Базилевича;
- Рассмотрение второго уравнения Левнера-Куфарева с построением цепи Базилевича с выпуклым ядром;
- Рассмотрение построения однопараметрического множества однолистных функций, при различных случаях.

Основное содержание работы. В теории однолистных функций известны дифференциальные уравнения П. Куфарева

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t)p(f, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -zf'(z, t)p(f, t), \quad (2)$$

обобщающие соответствующие уравнения Левнера

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + kf(z, t)}{1 - kf(z, t)}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -zf'(z, t) \frac{1 + kz}{1 - kz} \quad (4)$$

В уравнениях (1) и (2) $p(u, t) = 1 + \alpha_1(t)u + \dots$ - регулярная в круге $|u| < 1$ функция, имеющая положительную действительную часть и кусочно-непрерывная по параметру t ; $k = e^{i\Theta}$ где $\Theta = \Theta(t)$ - действительная кусочно-непрерывная функция, $0 \leq t < \infty$.

Интеграл $f(z, t) = e^{-t}z + c_2z^2 + \dots$ каждого из этих уравнений при фиксированном значении t представляет некоторую регулярную и однолиственную функцию в круге $|z| < 1$. В общем случае уравнения Левнера — Куфарева не интегрируются в квадратурах. Однако, для некоторых частных видов функций $p(u, t)$ уравнения (1) и (3) допускают такое интегрирование и позволяют, таким образом, получить интегральное представление достаточно широкого подкласса однолистных функций, содержащего в себе, в частности, известные представления конформных отображений единичного круга на звездообразные и спиралеобразные области.

Полагая $\tau = e^{-t}$, $0 < \tau \leq 1$, перепишем уравнение (1) в форме

$$\frac{d\tau}{\tau} = p(f, \tau) \frac{df}{f}, \quad (5)$$

где

$$f = f(z, \tau), \quad f(z, 1) = z,$$

$p(f, \tau) = 1 + \alpha_1(\tau)f + \alpha_2(\tau)f^2 + \dots$ — функция, регулярная в круге $|f| < 1$, $\Re p(f, \tau) > 0$.

Формально обобщим уравнение (5) следующим образом:

$$p_1(f, \tau) = p(e^{ia \ln \tau} f, \tau),$$

где a действительный параметр. Делая замену:

$$\xi = e^{ia \ln \tau} f,$$

найдем:

$$\frac{df}{f} = \frac{d\xi}{\xi} - ia \frac{d\tau}{\tau}$$

Положим

$$\frac{1}{p(\xi, \tau)} = p_2(\xi, \tau) = 1 + \beta_1(\tau)\xi + \dots, \quad |\xi| < 1,$$

где $\Re p_2(\xi, \tau) > 0$. Тогда получим:

$$[p_2(\xi, \tau) + ai] \frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\xi}{\xi}.$$

Так как

$$\frac{1}{p_2(\xi, \tau) + ai} = \frac{1 - ai}{1 + a^2} + \gamma_1 \xi + \dots = \frac{p_3(\xi, \tau)}{1 + a^2} - \frac{ai}{1 + a^2},$$

где

$$p_3(\xi, \tau) = 1 + \delta_1(\tau)\xi + \delta_2(\tau^2)\xi^2 + \dots, \quad \Re p_3(\xi, \tau) > 0$$

в круге $|\xi| < 1$, то (опуская индекс 3) получим:

$$(1 + a^2) \frac{d\tau}{\tau} = [p(\xi, \tau) - ai] \frac{d\xi}{\xi}. \quad (6)$$

Известно, что интеграл $\xi = \xi(\tau, z)$ уравнения Левнера

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi \frac{\mu(\tau) + \xi}{\mu(\tau) - \xi}, \quad 0 < \tau < \infty, \quad \xi|_{\tau=0} = z, \quad (7)$$

с подвижной полярной особенностью правой части в точке $\xi = \mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, представляет собой голоморфную однолиственную функцию параметра z в $E = z : |z| < 1$. Предел

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^\tau \xi(\tau, z) = z + \dots \quad (8)$$

— также голоморфная однолиственная в E функция. Имеем $f \in S'$, где S класс однолистных, регулярных в $|z| < 1$ функций с $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

Укажем $\mu(\tau)$, $\mu(0) = 1$, при котором уравнение (7) интегрируется в квадратурах, и найдем соответствующие $f(z)$.

Будем считать $\mu(\tau)$ непрерывно дифференцируемой функцией. Поло-

жим $\mu(\tau) = e^{-i\delta\tau}\chi^{\alpha+\beta}(\tau)$, где $|\chi(\tau)| = 1$, $\chi(0) = 1$, α и β — фиксированные положительные числа, δ — вещественная постоянная.

Произведем в (7) замену переменной $\omega = \frac{e^{i\delta\tau}\xi}{\chi^\beta}$ и обозначим $\chi^\alpha = \lambda$, $\frac{\alpha}{\beta} = 2s$. Очевидно, $|\lambda(\tau)| = 1$ при $0 < \tau < \infty$, и уравнение (7) преобразуется в уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega\left(1 + i\delta - \frac{\lambda'}{2s\lambda}\right)\frac{\eta - \omega}{\lambda - \omega}, \quad \omega|_{\tau=0} = z, \quad (9)$$

с функцией

$$\eta = \eta(\tau) = \lambda\frac{\lambda' + 2\bar{m}\lambda}{\lambda' - 2m\lambda}, \quad m = s(1 + i\delta), \quad (10)$$

равной по модулю единице при $0 < \tau < \infty$. Подчиним $\lambda(\tau)$ условию: $\eta(\tau) = \gamma$, где постоянная $\gamma = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Проинтегрировав при $\eta(\tau) = \gamma$ уравнение (10) с начальным условием $\lambda|_{\tau=0} = 1$, получим

$$(1 + \bar{\varepsilon})\ln(\lambda + \varepsilon\gamma) + 2\bar{m}\tau = \bar{\varepsilon}\ln\lambda + (1 + \bar{\varepsilon})\ln(1 + \varepsilon\gamma), \quad (11)$$

где $\varepsilon = \frac{m}{\bar{m}}$. Для указанного $\lambda(\tau)$ имеем

$$1 + i\delta - \frac{\lambda'}{2s\lambda} = \frac{2\lambda}{\lambda - \gamma},$$

и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{2\lambda\omega(\gamma - \omega)}{(\lambda - \gamma)(\lambda - \omega)}, \quad \omega|_{\tau=0} = z.$$

Теперь перейдем от переменной τ к λ , воспользовавшись формулой

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{2\bar{m}\lambda(\lambda + \varepsilon\gamma)}{\lambda - \gamma}.$$

Получим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{\omega(\gamma - \omega)}{m(\lambda - \omega)(\lambda + \varepsilon\gamma)}, \quad \omega|_{\lambda=1} = z,$$

которое после замены переменной $v = (\lambda + \varepsilon\gamma)^{-1}$ преобразуется в линейное

уравнение

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{\bar{m}(\varepsilon\gamma + \omega)}{\omega(\gamma - \omega)}v + \frac{\bar{m}}{\omega(\gamma - \omega)}.$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию $v = (1 + \varepsilon\gamma)^{-1}$ при $\omega = z$, имеет вид

$$v = \left[\bar{m} \int_z^\omega \frac{u^{m-1} du}{(\gamma - u)^{2s+1}} + \frac{1}{1 + \varepsilon\gamma} \frac{z^m}{(\gamma - z)^{2s}} \right] \left[\frac{\omega^\varepsilon}{(\gamma - \omega)^{1+\varepsilon}} \right]^{-\bar{m}},$$

откуда с учетом равенства

$$\frac{z^m}{(\gamma - z)^{2s}} = \bar{m} \int_0^z \frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma + u) du}{(\gamma - u)^{2s+1}}$$

находим

$$\frac{\omega^m}{(\lambda + \varepsilon\gamma)(\gamma - \omega)^{2s}} = \bar{m} \int_z^\omega \frac{u^{m-1} du}{(\gamma - u)^{2s+1}} + \frac{\bar{m}}{1 + \varepsilon\gamma} \int_0^z \frac{u^{m-1}(\varepsilon\gamma + u) du}{(\gamma - u)^{2s+1}}.$$

Выполним здесь предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$, учитывая, что $\omega = e^{i\delta\tau} \xi(\tau, z) / \chi^\beta(\tau)$, $\lambda = \chi^\alpha(\tau)$, формулу (8) и вытекающее из нее условие $\xi(\tau, z) \rightarrow 0$ а также условие $\lambda \rightarrow -\varepsilon\gamma$, выводимое из (11). В итоге получим функцию

$$f(z) = \left[s(1 + i\delta) \int_0^z \frac{(1 - u)u^{s(1+i\delta)-1} du}{(1 - e^{-i\varphi}u)^{2s+1}} \right] \frac{1}{s(1 + i\delta)} \quad (12)$$

класса S .

При $\delta = \varphi = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ имеем результат П. П. Куфарева.

Функция (12) с произвольно взятыми постоянными $-\infty < \delta < \infty$, $s > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ принадлежит классу И. Е. Базилевича с $p_1(u) = 1 - u$, $p_0(u) = s(1+i\delta) + (2s+1) \frac{z}{(e^{i\varphi} - z)}$. Будем рассматривать формулу Базилевича в виде:

Теорема 2.1 Пусть функции $p_1(z), p_2(z) \in C$. Тогда функция

$$f(z) = (\alpha b(z)) \frac{1}{p_2(0)}, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{p_2(0)}{p_1(0)}, b(z) = \int_0^z p_1(z) z^{p_2(0)-1} \nu(z) dz, \quad (14)$$

$$\nu(z) = e^{\int_0^z (p_1(z)-p_2(0)) \frac{dz}{z}}, \quad (15)$$

регулярна и однолистка в E , если под $f(z)$ понимать ту ветвь многозначной функции, которая имеет разложение $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$.

Класс функций $f(z)$ в (13), при обозначениях (14),(15), включает известные функции: звездообразные, выпуклые, спиралеобразные, почти - выпуклые функции, класс функций с ограниченным вращением. Напомним, что данную формулу И.Е. Базилевич получил в результате применения первой формулы Левнера-Куфарева (1).

Теорема 2.2 Пусть

- 1) $p_0 = p_0(z), p_1 = p_1(z), p_2 = p_2(z)$ принадлежат классу C ;
- 2) функция $c(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{z c'(z)}{c(z)} = p_2(z) \in C; \quad (16)$$

и представима в E в виде

$$c(z) = z^{p_2(0)} \cdot e^{\int_0^z (p_2(z)-p_2(0)) \frac{dz}{z}}, z \in E \quad (17)$$

- 3) функция $a(z)$ представима в E в виде

$$a(z) = c(z) \cdot e^{\int_0^z c(z) \cdot p_1(z) \frac{dz}{z}}; \quad (18)$$

- 4) функция $b(z)$ представима в E в виде

$$b(z) = \int_0^z c(z) \cdot a(z) \cdot p_0(z) \frac{dz}{z}; \quad (19)$$

5) функции $p_0(z), p_1(z), p_2(z)$ удовлетворяют соотношению

$$z\left(\frac{p_1}{p_0}\right)' + \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{za'}{a} - \frac{1}{c}\left(\frac{za'}{a} - \frac{zc'}{c}\right) = c \cdot p_0. \quad (20)$$

Тогда функция

$$F(z, t) = (g(z, t))^{\frac{1}{2p_2(0)}} = (e^{ct} \cdot (at + b))^{\frac{1}{2p_2(0)}} = c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \dots \quad (21)$$

удовлетворяет уравнению Левнера-Куфарева вида

$$\frac{zF_z}{F_t} = p_2(z)t + \frac{p_1(z)t + p_0(z)}{t + \frac{p_1(z)}{p_0(z)}}, \quad z \in E, t \in T = [0, \infty). \quad (22)$$

Теорема 2.3 Пусть

- 1) $p_2(z), p_1(z) \in C$;
- 2) $\nu(z) = e^{\int_0^z \frac{p_2(z)-p_2(0)}{z} dz}$;
- 3) $k(z) = \int_0^z p_1(z) \cdot z^{p_2(0)-1} \nu(z) dz$;
- 4) $a_2(z) = z^{2p_2(0)} \nu^2(z)$;
- 5) $p_0(z) = \frac{k(z)}{z^{p_2(z)} \nu(z) p_1(z)} \in C$.

Тогда функция

$$F(z, t) = \{a_2(z)t^2 + a_1(z)t + a_0(z)\}^{\frac{1}{2p_2(0)}} = c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \dots,$$

где

$$a_1(z) = z^{2p_2(0)} \nu(z) 2k(z),$$

$$a_0(z) = 2 \int_0^z p_0(z) \cdot z^{2p_2(0)-1} \nu^2(z) dz$$

регулярна и однолистка в E при каждом $t \geq 0$.

Обозначим через:

B -ненормированное в E множество функций вида

$$g(z) = \int_0^z h(z) e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz, \quad (23)$$

где $h(z) \in C, p(z) \in P$;

B_ϕ - множество функций $g(z) \in B$ с фиксированной производной

$$\phi'(z) = e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz}, \quad (24)$$

выпуклой функции

$$\phi(z) = \int_0^z e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz. \quad (25)$$

Заметим, что записанная как определенный интеграл функция $g(z)$ в (25) может быть представлена как неопределенный интеграл в виде

$$g(z) = \int \frac{h(z)}{z} e^{\int \frac{p(z)}{z} dz} dz. \quad (26)$$

Аналогично, в случае (26) имеем

$$\phi'(z) = \frac{e^{\int \frac{p(z)}{z} dz}}{z}. \quad (27)$$

Запись в виде (26), (27) удобна при выкладках. Приведем доказательство однолиственности функции $g(z)$ в (23), отличное от ранее известных вариантов.

Теорема 2.4 Пусть $h(z) \in C, p(z) \in P$. Тогда функция $g(z)$ вида (23) регулярна и однолистка в E .

Теорема 2.5 Класс B_ϕ является линейным подмножеством.

К числу различных важных направлений исследований относятся обратные задачи. Понятия "Обратная функция" "обратная задача" связаны с понятиями взаимнооднозначного, биективного, однолистного отображения, однолистной функции, рассмотренных в [1-5]. В данном разделе, таким образом, мы указали структуру интеграла и условия, при которых функция определенного вида является решением дифференциального уравнения Левнера-Куфарева.

Параметры цепи функции типа Базилевича. Теперь рассмотрим такой вид формулы Базилевича:

$$f(z) = \left(\frac{p_1(0)}{p_0(0)} \int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} \right)^{\frac{1}{p_1(0)}} = z + a_1 z^2 + \dots$$

принадлежащей классу S , где $f(z)$ - однозначная ветвь данного разложения, $p_0(z), p_1(z) \in C$. Функцию вида

$$\int \frac{p_0(z)}{z} \nu(z) dz, \nu(z) = e^{\int \frac{p_1(z)}{z} dz}$$

назовем составляющими функциями формулы Базилевича, а функцию $p(z, t) \in C(T)$ - ядром уравнения Лёвнера-Куфарева.

Построение однопараметрического множества однолистных функций вида

$$g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^n a_k(z) t^k \right)^\alpha, t \geq 0, (*)$$

сводится к построению ядра $p(z, t)$ класса $C(T)$ с учетом исходной позиции

$$\frac{z g'_z}{g'_t} = \frac{z \sum_{k=0}^n a'_k(z) t^k}{\sum_{k=1}^n k a_k(z) t^{k-1}} \equiv p(z, t).$$

Рассмотрим различные случаи построения однопараметрического множества однолистных функций, в зависимости от их вида.

1 случай. Относительно функции вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t)^\alpha \quad (28)$$

2 случай. Относительно функции вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t + a_2(z)t^2)^\alpha, \alpha = \frac{1}{2p_2(0)}, \quad (29)$$

Заключение. В процессе выполнения данной бакалаврской работы были рассмотрены цепи Левнера для функций классов Базилевича, с различными параметрами, что позволило значительно углубить понимание структурных

особенностей этих цепей и выявить их ключевые свойства. Основное внимание было уделено как теоретическим аспектам построения цепей Левнера, так и анализу их поведения на различных классах функций Базилевича. В первой части работы было рассмотрено первое уравнение Левнера-Куфарева и функции класса Базилевича. Было представлено интегральное представление функции класса Базилевича, что позволило более детально изучить их свойства и особенности. Далее были рассмотрены цепи Левнера для функции классов Базилевича, что дало возможность выявить связи между различными классами аналитических функций. Во второй части работы было рассмотрено второе уравнение Левнера-Куфарева и модификация класса Базилевича. Особое внимание было уделено построению цепи Базилевича с выпуклым ядром. Анализ параметров цепи функции типа Базилевича показал, что они обладают рядом уникальных свойств, которые могут быть использованы для дальнейшего развития теории функций комплексного переменного.